باب 8

ثقل
(GRAVITATION)

8.1 تعارف (Introduction)

ہم اپنی ابتدائی زندگی میں یہ جانکاری حاصل کر چکے ہیں کہ زمین اپنی طرف ساری چیزوں کی کھینچتی ہے۔ کوئی شئے اگر اوپر پھینکی جائے تو نیچے کی جانب آجاتی ہے۔ اوپر کی جانب پہاڑی پر جانا کافی مشکل ہوتا ہے جبکہ اترنا آسان ہوتا ہے۔ اوپر بادل سے برستے پانی کا قطرہ زمین کی طرف آتا ہے اور اسی طرح بہت سارے واقعات ہیں۔ تاریخی طور پر یہ سہرا اٹلی کے ایک مشہور طبیعات داں گیلیلو (1574 -1642) کے سر ہے جس نے یہ مانا کہ سارے ہی اجسام خواہ اسکی کمیت کچھ بھی ہو زمین کی طرف ایک مستقل اسراع کے ساتھ اسراع پذیر ہوتے ہیں۔ یہ کہا جاتا ہے کہ انہوں نے اس حقیقت کا عوام کے سامنے مظاہرہ کیا۔ اسکی صداقت کے لیے انہوں نے مائل مستوی پر نیچے کی جانب لڑھکتے ہوئے دو اجسام پر یہ تجربہ بھی کیا اور اس سے زمینی کشش اسراع کی قدر معلوم کی جو بعد میں معلوم کی جو بعد میں معلوم کی گئی اس کی زیادہ درست قدر کے کافی نزدیک تھی۔

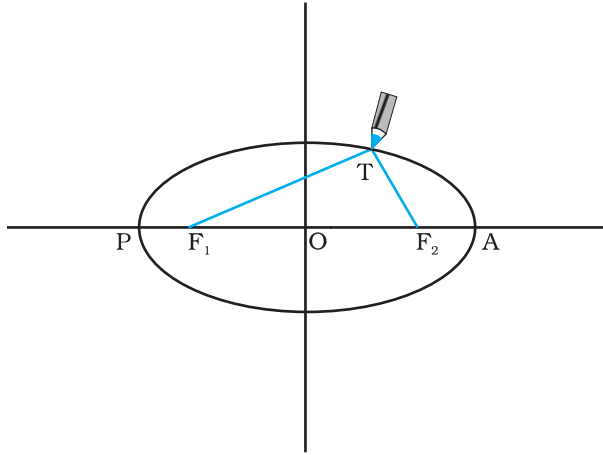
ابتدا سے ہی کئی ملکوں کے لیے، بہ ظاہر ایک غیر متعلق مظاہرہ، سیاروں اور ستاروں کی حرکت، ایک اہم موضوع رہا ہے۔ ابتدائی دور سے ہی آسمان میں نظر آنے والے ایسے تاروں کو پہچان لیا گیا تھا جو سالوں سال ایک دوسرے کی نسبت اپنا مقام نہیں تبدیل کرتے ہیں۔ ان سے بھی زیادہ دلچسپی کا باعث سیارے ہیں جو، تاروں کے پس منظر میں، مستقل حرکت پذیر ہیں۔ سیاروں کی حرکت کے لیے سب سے پرانا ماڈل ٹالیمی (Ptolemy) نے تقریباً 2000 سال قبل دیا تھا جسے ارض مرکزی (جیوسینٹرک)(geocentric) ماڈل کہا گیا۔ اسکے مطابق سبھی فلکیاتی اشیا، سورج، تارے، سیارے، زمین کے گرد گھومتے ہیں۔ یہ سمجھا گیا کہ فلکیاتی اشیاء کے لیے صرف ایک ہی طرح کی حرکت کر سکنا ممکن ہے، جو کہ ایک دائرہ میں کی جانے والی حرکت ہے۔ سیاروں کی مشاہدہ کی گئی حرکت کی وضاحت کرنے کے لیے ٹالیمی نے حرکت کی پیچیدہ اسکیمیں پیش کیں۔ یہ کہا گیا کہ سیارے دائرہ میں حرکت کرتے ہیں، جبکہ ان دائروں کے مراکز خود بڑے دائروں میں حرکت کرتے ہیں۔ ہندستانی

ماہرین فلکیات نے بھی 400 سال قبل اسی طرح کے (ارض مرکزی) نظریے پیش کیے۔ بہرحال آریا بھٹ (5 ویں A.D.) نے ایک بہترین ماڈل پیش کیا جس کے مطابق سورج کو مرکز مانا گیا اور اس کے گرد سیاروں کو حرکت کرتا ہوا مانا گیا۔ اس ماڈل کو شمس مرکزی (heliocentric) ماڈل کہا گیا۔ ایک ہزار سال کے بعد پولینڈ کے ایک راہب نکولس کو پرنکس (1473-1543) نے یہ بتایا کہ، سورج اپنی جگہ قائم رہتا ہے اور سبھی سیارے سورج کے گرد دائروں میں حرکت کرتے ہیں۔ ان دائروں کا مرکز سورج ہوتا ہے۔ کوپرنکس کے نظریے کو چرچ نے رد کر دیا، لیکن کوپرنکس کے نظریے کے حامیوں میں ایک اہم نام گیلیلو کا ہے، جن پر اس نظریے کی حمایت کرنے کے جرم میں اس وقت کی ریاست نے مقدمہ بھی چلایا۔

گیلیلو کے عہد میں ہی ڈنمارک کے ٹائیکو براہے (1546-1601) نے اپنی پوری زندگی ننگی آنکھ سے سیاروں کا مشاہدہ کرنے میں گذاری۔ ان کے ذریعے اکٹھا کیے گئے آنکڑوں کا تجزیہ بعد میں اس کے ایک معاون جان یا جوہانس (1604-1730) نے کیپلر نے ان آنکڑوں سے تین اہم قانون اخذ کیے جواب ان کے نام پر ''کیپلر قانون'' کہلاتے ہیں۔ یہ قانون نیوٹن کے علم میں تھے اور ان کی مدد سے نیوٹن نے ایک اہم سائنسی کارنامہ، اپنا ''مادی کشش کا کائناتی قانون''، پیش کر کے، انجام دیا۔

8.2 کیپلر کے قانون (Kepler's laws)

کیپلر کے تینوں قانونوں کو اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے

1. مداروں کا قانون (Law of orbits): تمام سیارے ناقص مدار (Elipical orbits) میں حرکت کرتے ہیں اور سورج کے اس کے ناقص دونوں ماسکوں (فوسائی) میں سے کسی ایک پر واقع ہوتا ہے (شکل (8.1(a)۔ یہ قانون کوپرنکس ماڈل، جو صرف دائری مدار ہی بتاتا ہے، سے انحراف کرتا ہے۔ ناقص کی شکل ہم اس طرح بنا سکتے ہیں۔

شکل 8.1(a) ایک سیارہ کے ذریعے سورج کے گرد تشکیل دیا گیا ناقص۔ ناقص کا سورج سے نزدیک ترین نقطہ P اور دور ترین نقطہ A ہے۔ نقطہ P اور A کو علی الترتیب قریب آفتاب (perihelin) اور اوج شمس (aphelion) کہتے ہیں۔ نصف اکبر محور AP کا نصف ہے

شکل 8.1(b) ایک ناقص کھینچنا۔ ایک دھاگے کے سرے F_1 اور F_2 پر نصب کر دیے گئے ہیں۔ پنسل کی نوک دھاگے کو تنا ہوا رکھتی ہے اور اسے دھاگے کے سہارے گھمایا جاتا ہے۔

دو نقطے F_1 اور F_2 لیں۔ F_1F_2 لمبائی کا ایک دھاگہ لیں اور اس دھاگہ کا ایک سرا F_1 پر اور دوسرا F_2 پر پنوں کے ذریعے نصب کر دیں۔ پنسل کی نوک کے ذریعے دھاگے کو اس طرح کھینچیں کہ وہ پورا تن جائے۔ دھاگہ

کو تنا ہوا رکھتے ہوئے پنسل کو حرکت دیتے ہوئے ایک منحنی کھینچیں۔[شکل(8.1(b)]۔اس طرح آپ کو جو بند منحنی حاصل ہوگا، وہ ناقص (بیضہ Ellipse) کہلاتا ہے۔ ناقص شکل کے کسی بھی نقطہ T سے F_1 اور F_2 کے فاصلوں کا حاصلِ جمع مستقل عدد ہوگا۔ F_1 اور F_2 فوسائی کہلاتے ہیں۔ اب F_1 اور F_2 نقطہ کو ملائیں اور اس خط کو اتنا آگے بڑھائیں کہ یہ خط ناقص شکل کو شکل کے نقطے P اور A پر قطع کرے۔ (شکل (8.1(b) خط PA کا وسطی نقطہ ناقص شکل کا مرکز O ہے اور لمبائی PO= AO ناقص شکل کا نصف اکبر محور (Semi major axis) ہے ایک دائرہ کے لئے یہ دونوں ماسکے ایک ہی نقطہ پر منطبق ہوتے ہیں اور نصف اکبر محور دائرہ کا نصف قطر ہو جاتا ہے۔

2 رقبوں کا قانون (Law of areas): سورج سے کسی بھی سیارے کو ملانے والا خط مساوی وقفہ وقت میں مساوی رقبہ طے کرتا ہے (شکل 8.2)۔ اس قانون کی بنیاد یہ مشاہدہ ہے کہ سیارے جب سورج کے مقابلتاً قریب ہوتے ہیں تو وہ مقابلتاً تیز چلتے ہوئے معلوم ہوتے ہیں۔ اور جب سورج سے ان کا فاصلہ زیادہ ہوتا ہے تو وہ مقابلتاً آہستہ چلتے ہوئے معلوم ہوتے ہیں۔

شکل 8.2 سیارہ P سورج کے گرد ناقص مدار میں حرکت کرتا ہے۔ سایہ کیا ہوا رقبہ ΔA وقفہ مدت ΔT میں طے کیا ہوا رقبہ ہے۔

دوری وقفوں کا قانون (Law of periods): ایک سیارے کے دوری وقفہ کا مربع سیارہ کے ذریعے تشکیل دیے گئے، ناقص کے نصف اکبر محور کے مکعب کے متناسب ہوتا ہے۔

درج ذیل جدول میں سورج کے گرد نو سیاروں کی گردش کا تقریبی دوری وقفہ اور نصف اکبر محور کی قدریں دی گئی ہیں۔

جدول 1 سیاروں کی حرکت کی پیمائش سے حاصل کیے گئے درج ذیل آنکڑے کیپلر کے دوری وقفوں کے قانون کی تصدیق کرتے ہیں۔

a= نصف محوا کبر (10^{10}m کی اکائی میں)

t= سیارہ کی گردش کا دوری وقفہ (سال میں)

Q= حاصل تقسیم (T^2/a^2) ($10^{-34}\ y^2\ m^{-3}$ کی آکائی میں)

سیارہ	a	T	Q
مرکری (عطارد)	.579	0.25	2.95
وینس (زہرہ)	10.8	0.615	3.00
(ارتھ) زمین	15.0	1	2.96
مارس (مریخ)	22.8	1.88	2.98
جیوپیٹر (مشتری)	77.8	11.9	3.01
سیٹرن (زحل)	143	29.5	2.98
یورینس (ادراونس)	287	84	2.98
نیپچون (تیپتون)	450	165	2.99
پلوٹو (پلاٹو)	590	248	2.99

دوری وقفوں کے قانون کو ہم زاویائی معیارِ حرکت کی بقا کے نتیجے کے طور پر دیکھ سکتے ہیں جو کسی بھی مرکزی قوت کے لئے لاگو ہوسکتا ہے۔ مرکزی قوت، سیارہ پر لگ رہی وہ قوت ہے جو سورج اور سیارہ کو ملانے والے سمتیہ کی سمت میں ہوتی ہے۔ مان لیجئے سورج مبدا پر ہے اور سیارہ کا مقام اور معیارِ حرکت بالترتیب **r** اور **p** ہیں۔ سیارہ کے ذریعہ طے گیا رقبہ **ΔA** جس کی کمیت m اور وقفہ ΔT ہے

(شکل 8.2) تو

$$\Delta A = 1/2(\mathbf{r} \times \mathbf{v}\Delta t) \qquad (8.1)$$

اس لیے

$$\Delta \mathbf{A}/\Delta t = 1/2(\mathbf{r} \times \mathbf{p})/m \qquad (\text{جبکہ } \mathbf{v}=\mathbf{p}/m)$$

$$= L/(2m) \qquad (8.2)$$

جہاں $\mathbf{v}$ رفتار ہے، $\mathbf{L}$ زاویائی معیارِحرکت $(\mathbf{r}\times\mathbf{p})$ ہے۔ایک مرکزی قوت کے لیے جو r کی سمت میں ہے، سیارہ کی گردش کے دوران L ایک مستقلہ ہوتا ہے اس طرح آخری مساوات کے مطابق $\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t}$ ایک مستقلہ ہے۔یہ رقبوں کا قانون ہے۔مادی کشش قوت ایک مرکزی قوت ہے اس لئے رقبوں کا قانون لاگو ہوتا ہے۔

جان یاجوھانس (1604 تا 1630)
جرمن نژاد سائنس داں تھے۔انہوں نے ٹائیکو بریہہ اور معاونین کی جفاکش محنت سے حاصل کیے ہوئے مشاہدات پر مبنی سیاری حرکت سے متعلق تین قوانین کو وضع کیا۔کیپلر خود بریہہ کے ایک معاون تھے۔انہیں سیاری حرکت کے تین قوانین کی تدوین میں بیس سال لگ گئے۔انہیں جیومتریائی بصریات کا بانی بھی مانا جاتا ہے،کیونکہ یہ پہلے سائنس داں تھے جنھوں نے یہ دریافت کیا کہ کسی دوربین میں داخل ہونے کے بعد روشنی پر کیا گزرتی ہے۔

مثال 8.1 مان لیجئے شکل (a) 8.1 میں سیارہ کی چال قریب آفتاب P پر v_p ہے اور سورج سیارہ دوری SP، r_p ہے۔(r_p, v_p) کا قریب آفتاب BAC پر ان کی بالترتیب مقداروں سے رشتہ معلوم کریں۔کیا سیارہ کو BAC اور CPB طے کرنے کے لئے یکساں وقت لگےگا؟

جــواب P پر زاویائی معیارِحرکت کی عددی قدر: $L_p = M_p r_p V_p$ ہے، کیونکہ مشاہدہ یہ بتاتا ہے کہ $\mathbf{r}_p$ اور $\mathbf{v}_p$ آپس میں عمود ہیں۔اسی طرح: $L_A = m_p r_A v_A$ زاویائی معیارِحرکت کی بقا سے :

$$m_p r_p v_p = m_p r_A v_A$$

یا

$$\frac{v_p}{v_A} = \frac{r_A}{r_p}$$

جبکہ

$$r_A > r_p$$

اس لیے

$$v_p > v_A$$

ناقص SBAC،اورنصف قطر سمتیوں SB اور SC سے گھرا ہوا رقبہ SBAC، SBPC سے بڑا ہے(شکل 8.1)۔کیپلر کے دوسرے قانون کے مطابق یکساں مدت میں یکساں رقبہ طے ہوتا ہے۔ اس لیے سیارہ CPB کے بالمقابل BAC طے کرنے میں زیادہ وقت لگاتا ہے۔

8.3 مادی کشش کا ہمہ گیر قانون (Universal Law of Gravitation)

مشہور یہی قصہ ہے کہ درخت سے گرتے ہوئے سیب کے مشاہدہ سے نیوٹن نے مادی کشش کے ہمہ گیر قانون تک پہنچنے کے لیے وجدان حاصل کیا۔اس قانون کے ذریعے زمینی کشش اور کیپلر کے قوانین کی وضاحت کی جاسکی۔ نیوٹن کا یہ کہنا تھا کہ چاند جو نصف قطر R_m کے مدار میں گردش کرتا ہے اس پر زمینی قوت کشش کے ذریعہ مرکز جو (centripetal) اسراع لگتا ہے جس

مرکزی قوتیں (Central Forces)

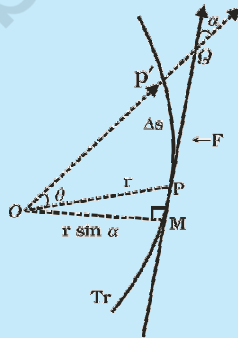
ہم جانتے ہیں کہ مبدا کے گرد ایک ذرہ کے زاویائی معیارِ حرکت میں وقت کے ساتھ تبدیلی کی شرح $\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ہوتی ہے۔ اگر ذرّہ پر قوت F کے ذریعے لگ رہا قوتِ گردشہ τ صفر ہو تو ذرّے کے زاویائی معیارِ حرکت کی بقا ہوتی ہے۔ یہ تب ہی ممکن ہے جب **F** صفر ہو یا **F**، ($\vec{r}$) کی سمت میں ہو۔ ہم اسی قوت میں دلچسپی رکھتے ہیں جو بعد والی شرط کے مطابق ہو۔ مرکزی قوتیں اسی شرط کو مطمئن کرتی ہیں۔ ایک مرکزی قوت ہمیشہ ایک متعین نقطہ کی جانب یا اس سے دور کی طرف ہوتی ہے یعنی متعین نقطہ کے لحاظ سے، جس نقطہ پر قوت لگ رہی ہے اس کے مقام سمیتہ کی جانب۔ تاہم مرکزی قوت F کی عددی قدر R کے تابع ہے یعنی متعین نقطہ سے اِس نقطہ کی دوری کے تابع ہے جس پر قوت لگ رہی ہے۔ $F=F(r)$ (شکل نیچے دکھائی گئی ہے)

مرکزی قوت کے تحت حرکت میں زاویائی معیارِ حرکت کی ہمیشہ بقا ہوتی ہے۔ اس سے دو اہم نتائج برآمد ہوتے ہیں

(1) مرکزی قوت کے تحت ذرہ کی حرکت ہمیشہ ایک مستوی میں ہی محدود ہوتی ہے۔

(2) قوت کے مرکز کے لحاظ سے (یعنی متعین نقطہ) ذرہ کے مقام سمتیہ کی ہمیشہ ایک مستقل رقبی رفتار (Areal Velocity) ہوتی ہے۔ دیگر الفاظ میں یہ کہا جاسکتا ہے کہ جب ذرہ مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کرتا ہے تو مقام سمیتہ یکساں وقفہ وقت میں یکساں رقبہ طے کرتا ہے۔

ان دونوں نتیجوں کو ثابت کرنے کی کوشش کریں۔ آپ کو یہ جاننے کی ضرورت ہوسکتی ہے کہ رقبی رفتار: $dA/dt = \frac{1}{2}\, r\upsilon \sin\alpha$ سے دی جاتی ہے۔

درج بالا گفتگو کو ہم سورج کی قوت کشش کے تحت ہونے والی سیاروں کی حرکت کے مطالعہ میں استعمال کرسکتے ہیں۔ آسانی کے لیے سورج کو اس قدر وزنی مانا جاسکتا ہے کہ یہ حالت سکون میں ہو۔ سیارہ پر سورج کی قوت کشش سورج کی جانب ہوتی ہے۔ یہ قوت اس شرط کو بھی مطمئن کرتی ہے کہ $F=F(r)$ چونکہ $F = Gm_1 m_2/r^2$ جہاں m_1 اور m_2 بالترتیب سورج اور سیارہ کی کمیت ہے اور G ہمہ گیر مادی کشش مستقلہ ہے۔ اوپر بیان کئے گئے دونوں نتیجے (1) اور (2) اسی لیے سیارہ کی حرکت میں لاگو ہوتے ہیں۔ درحقیقت نتیجہ (2) کیپلر کا دوسرا قانون ہے۔

Tr مرکزی قوت کے تحت ذرہ کا حرکت خط (Trajectory) ہے۔ P پر قوت **OP** کی جانب لگتی ہے۔ O قوت کا مرکز ہے جسے مبدہ مانا گیا ہے۔ وقفہ Δt میں ذرہ P سے P' تک حرکت کرتا ہے: $PP' = \Delta s = \upsilon\,\Delta t$ قوس۔ خط حرکت کے نقطہ P پر کھینچا گیا خط مماس PQ، P' پر رفتار کی سمت دکھاتا ہے۔ وقفہ Δt میں طے کیا گیا رقبہ سیکٹر POP' کا رقبہ ہے۔ $\Delta t/2$ $(r\upsilon \sin\alpha)$ = $PP'/2$ $(r \sin\alpha)$ ≈ سیکٹر POP' کا رقبہ

کی عددی قدر ہے۔

$$a_m = \frac{V^2}{R_m} = \frac{4\pi^2 R_m}{T^2} \qquad (8.3)$$

جہاں V چاند کی چال ہے، جس کا دوری وقفہ T سے رشتہ ہے: $V = 2\pi R_m / T$، دوری وقفہ T تقریباً 27.3 دن ہے اور R_m کی اس وقت معلوم قدر تقریباً 3.84×10^8 m تھی۔ اگر ہم ان اعداد کو مساوات (8.3) میں رکھیں تو ہمیں a_m کی قدر حاصل ہوتی ہے وہ سطح زمین پر زمین کی مادی کشش کی وجہ سے پیدا ہونے والے زمینی کشش اسراع g کی قدر سے بہت کم ہے۔

یہ صاف ظاہر کرتا ہے کہ زمینی کشش کے ذریعہ لگی قوت فاصلے کے ساتھ کم ہوتی جاتی ہے۔ اگر کوئی یہ مان لے کہ زمین کی قوت کشش، مرکز زمین سے دوری کے معکوس مربع (Inverse Square) کے تناسب میں کم ہوتی ہے تو ہم پاتے ہیں $a_m \propto R_m^{-2}$ ، $g \propto R_E^{-2}$ اور اس لیے

$$\frac{g}{a_m} = \frac{R_m^2}{R_E^2} \sim 3600 \qquad (8.4)$$

$g\sim9.8.ms^2$ اور a_m کی مساوات (8.3) سے لی گئی قدر سے موافقت رکھتا ہے۔ جو ان مشاہدات کی بناء پر نیوٹن نے درج ذیل مادی کشش کا ہمہ گیر قانون تجویز کیا۔

اس کائنات میں ہر ایک جسم ہر دوسرے جسم کو ایک ایسی قوت کے ساتھ کھینچتا ہے جو ان کی کمیتوں کے حاصل ضرب کے راست متناسب اور ان کے درمیان کی دوری کے مربع کے معکوس متناسب ہوتی ہے۔

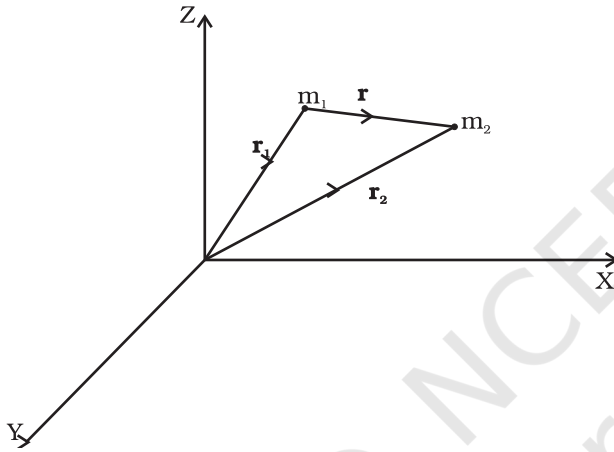
یہ قول دراصل نیوٹن کی شاہکار کتاب متھیمٹکل پرنسپلس آف نیچرل فلاسفی (مختصراً پرنسپیا (Principia) سے لیا گیا ہے۔

اسے ہم ریاضیاتی طور پر اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔ ایک نقطہ کمیت M_2 پر دوسرے نقطہ کمیت M_1 کے ذریعہ لگائی گئی قوت F کی عددی قدر ہوگی

$$|\mathbf{F}| = G\frac{m_1 \; m_2}{r^2} \qquad (8.5)$$

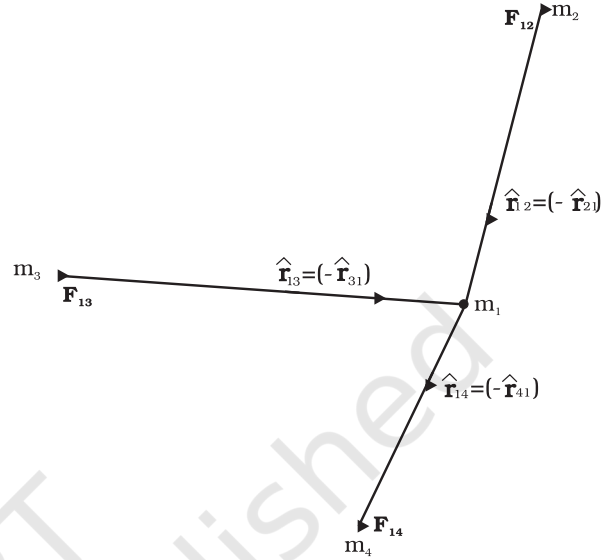
مساوات (8.5) کو سمتیہ شکل میں اس طرح لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1 \; m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{r}}) = -G\frac{m_1 \; m_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

جہاں G ہمہ گیر مادی کشش مستقلہ ہے $\hat{\mathbf{r}}$، m_1 سے m_2 تک اکائی سمتیہ ہے اور $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$، جیسا کہ شکل 8.3 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 8.3 M_1 پر M_2 کے ذریعہ لگی مادی کشش r کی سمت میں ھے جھاں سمتیہ **r** سمتیہ $(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$ ھے۔

ارضی کشش قوت کششی ہوتی ہے یعنی قوت **F**، $(-\vec{\mathbf{r}})$ کی سمت میں ہے۔ نقطہ کمیت m_1 پر، m_2 کے ذریعہ لگی قوت، نیوٹن کے تیسرے قانون کے مطابق **F**- ہوگی اس طرح جسم 1 پر 2 کے ذریعہ لگی ارضی کشش قوت $\mathbf{F}_{12}$ اور جسم 2 پر 1 کے ذریعہ لگی قوت $\mathbf{F}_{21}$ میں رشتہ : $\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}$ ہوگا۔

کسی بھی جسم پر مساوات (8.5) کے اطلاق سے قبل ہمیں محتاط رہنا چاہیے کیونکہ یہ قانون نقطہ کمیت کی بات کرتا ہے جب کہ ہمارا واسطہ متناہی سائز کی اشیاء سے ہوتا ہے۔ اگر ہمارے پاس نقطہ کمیتوں کا مجموعہ ہے تو کسی ایک نقطہ کمیت پر لگی قوت اس پر دوسری تمام نقطہ کمیتوں کے ذریعہ لگائی گئی مادی کشش

قوتوں کے سمتیہ جمع کے برابر ہوگی جیسا کہ شکل 8.4 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 8.4 نقطہ کمیت m_1 پر لگی مادی کشش قوت، اس پر m_2، m_3 اور m_4 کے ذریعہ لگائی گئی مادی کشش قوتوں کے سمتیہ جمع کے برابر ہے

m_1 پر کل قوت

$$\mathbf{F}_1 = \frac{Gm_2\, m_1}{r_{21}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{21} + \frac{Gm_3\, m_1}{r_{31}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{31} + \frac{Gm_4\, m_1}{r_{41}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{41}$$

مثال 8.2 ایک مساوی مثلث ABC کی ہر راس پر مساوی کمیت m kg کی ایک ایک کمیت رکھی ہوئی ہے۔
(a) مثلث کے وسطانی مرکز G پر رکھی گی 2m کمیت پر کتنی قوت لگ رہی ہے۔
(b) اگر راس A کی کمیت کو دوگنا کر دیا جائے تو کتنی قوت لگے گی؟

مان لیجیے کہ AG=BG=CG=1m (شکل 8.5 دیکھیے)

شکل 8.5 تین مساوی کمیتیں مساوی الاضلاع مثلث ΔABC کی راسوں پر رکھی ہوئی ہیں۔ ایک 2m کی کمیت وسطانی مرکز پر ہے۔

جواب (a) GC اور مثبت x- محور کے بیچ کا زاویہ 30^0 ہے اور اتنا

نیوٹن کا پرنسپیا (Newton's Principia)

کیپلر نے اپنے تیسرے قانون کو 1619 میں وضع کیا تھا۔ مادی کشش کے ہمہ گیر قانون کا اعلان تقریباً 70 سال بعد 1687 میں تب ہوا جب نیوٹن نے اپنے شاہکار فلاسفی نیچرالس پرنسپیا میتھمیٹکا (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) جسے مختصراً پرنسپیا کہتے ہیں شائع کیا۔

1685 کے آس پاس ایڈمنڈ ہیلی (جن کے نام پر مشہور ہیلی دمدار تارے کا نام پڑا) نیوٹن سے ملنے کیمبرج آئے اور ان سے پوچھا کہ مقلوب مربع قانون کے تحت متحرک کسی جسم کے خطِ حرکت (trajectory) کی فطرت کیا ہوگی؟ نیوٹن نے بغیر کسی جھجھک کے جواب دیا کہ راہ کی شکل ناقص ہی ہوسکتی ہے۔ درحقیقت ایسا نتیجہ انہوں نے بہت پہلے (1665 میں) اس وقت نکال لیا تھا جب طاعون پھیلنے کے سبب مجبور ہو کر وہ کیمبرج سے اپنے فارم ہاؤس آرام کے لیے چلے گئے تھے۔ بدقسمتی سے نیوٹن سے وہ صفحات گم ہوگئے تھے جن پر انہوں نے اس کا حل لکھ لیا تھا۔ لیکن ہیلی نے نیوٹن کو اس بات کے لیے قائل کر لیا کہ وہ اپنے کام کو کتاب کی شکل میں شائع کریں اور اشاعت کے اخراجات وہ (ہیلی) خود برداشت کریں گے۔ نیوٹن نے اپنی فوق الانسانی کوششوں سے یہ کارنامہ 18 مہینوں میں پورا کرلیا۔ پرنسپیا بے مثال سائنسی شاہکار ہے اور لیگرینج کے الفاظ میں ''انسانی دماغ کی سب سے عمدہ تخلیق ہے''۔ ہندوستان میں پیدا ہوئے فلکیاتی طبیعیات داں اور نوبل انعام یافتہ ایس چندر شیکھر نے پرنسپیا پر کتاب لکھنے میں 10 سال کا وقت لگایا۔ ان کی کتاب عام قارئین کے لیے پرنسپیا میں نیوٹن کے طریقوں میں پنہاں خوبصورت، باریک اور حیرت انگیز کفایتی اسلوب کی طرف توجہ مرکوز کرتی ہے۔

ہی زاویہ GB اور منفی x- محور کے درمیان بنتا ہے۔ سمتیہ ترقیم (vector notation) میں انفرادی قوتیں ہیں :

$$\mathbf{F}_{GA} = \frac{Gm(2m)}{1}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{F}_{GB} = \frac{Gm(2m)}{1}\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$\mathbf{F}_{GC} = \frac{Gm(2m)}{1}\left(+\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

انطباق اصول اور سمتیوں کے جمع کے قانون سے 2m کمیت پر لگنے والی ماحصل مادی کشش قوت $\mathbf{F}_R$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_{GA} + \mathbf{F}_{GB} + \mathbf{F}_{GC}$$

$$\mathbf{F}_R = 2Gm^2\,\hat{\mathbf{j}} + 2Gm^2\left(-\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right)$$

$$+ 2Gm^2\left(\hat{\mathbf{i}}\cos 30^o - \hat{\mathbf{j}}\sin 30^o\right) = 0$$

(b) اب اگر راس A کی کمیت کو دگنا کر دیا جائے۔ تو

$$F'_{GA} = \frac{G2m.2m}{1}\hat{j} = 4Gm^2\hat{j}$$

$$F'_{GB} = F_{GB} \text{ and } F'_{GC} = F_{GC}$$

$$F'_R = F'_{GA} + F'_{GB} + F'_{GC}$$

$$F'_R = 2\,Gm^2\,\hat{j}$$

ایک متناہی سائز کی شے (جیسے زمین) اور نقطہ کمیت کے درمیان مادی کشش قوت کے لیے مساوات (8.5) کو براہِ راست استعمال نہیں کیا جاسکتا ہے۔ متناہی سائز کے جسم کی ہر نقطہ کمیت دی گئی نقطہ کمیت پر قوت لگاتی ہے اور یہ سب قوتیں ایک ہی سمت میں نہیں ہوتی ہیں۔ ہمیں متناہی سائز کے جسم کی تمام نقطہ کمیتوں کے ذریعے دی گئی نقطہ کمیت پر لگ رہی قوتوں کی سمتیہ جمع کرنا ہوگی، تب ہی ہم دی گئی نقطہ کمیت پر لگ رہی کل قوت حاصل سکیں گے۔ دو مخصوص حالتیں ایسی ہیں، جن میں جب آپ سمتیہ جمع کرتے ہیں تو ایک آسان نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

(1) یکساں کثافت کے ایک کھوکھلے کرّی والے شیل اور شیل سے باہر واقع ایک نقطہ کمیت کے درمیان قوت کشش ٹھیک اس طرح ہوتی ہے جیسے کہ شیل کی کل کمیت شیل کے مرکز پر مرکوز ہوتی ہے۔

اسے اس طرح سمجھا جاسکتا ہے۔ شیل کے مختلف حصوں کے ذریعہ شیل کے باہر رکھی نقطہ کمیت پر لگ رہی مادی کشش قوتوں میں سے ہر ایک قوت کا ایک جز نقطہ کمیت کو مرکز سے ملانے والے خط کی سمت میں ہوگا اور دوسرا جز اس خط پر عمود خط کی سمت میں ہوگا۔ جب ہم سارے حصوں کے ذریعے لگ رہی قوتوں کی سمتیہ جمع کریں گے تو اس خط پر عمود خط کی سمت میں جو اجزاء ہوں گے وہ ایک دوسرے کی تنسیخ کردیں گے اور اس طرح ماحصل قوت صرف اسی خط کی سمت میں ہوگی جو نقطہ کمیت کو مرکز سے ملاتا ہے۔ اس ماحصل قوت کی عددی قدر وہی حاصل ہوتی ہے جو اوپر بتائی گئی ہے۔

(2) یکساں کثافت والے کرّی شیل کے ذریعہ شیل کے اندر رکھی نقطہ کمیت پر لگ رہی قوت کشش صفر ہوتی ہے۔ اس نتیجہ کو بھی ہم کیفیتی طور پر سمجھ سکتے ہیں۔ شیل کے مختلف حصے، شیل کے اندر رکھی نقطہ کمیت کو مختلف سمتوں میں کشش کرتے ہیں۔ یہ قوتیں ایک دوسرے کی مکمل طور پر تنسیخ کردیتی ہیں۔

8.4 مادی کشش مستقلہ (The Gravitational Constant)

مادی کشش کے ہمہ گیر قانون میں شامل مادی کشش مستقلہ G کی قدر تجربہ کے بنیاد پر معلوم کی جاسکتی ہے اور یہی سب سے پہلے انگریز سائنسداں ہنری کیونڈش نے 1798 میں کیا۔ ان کے ذریعے استعمال کیا گیا تجرباتی آلہ شکل 8.6 میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 8.6 کیونڈ ش کے تجربہ کا خاکہ: S_1اورS_2دو بڑے کرّے ھیں جن میں ایك کو A اورBپر رکھی کمیتوں کی ایك جانب اور دوسرے کو دوسری جانب رکھا گیا ھے۔(ان کرّوں کو سایہ سے ظاھر کیا گیا ھے) ان بڑے کرّوں کو کمیتوں کی دوسری جانب لے جایا جاتا ھے (ٹوٹے ھوئے خط کے ذریعے دکھائے گئے ھیں) تو چھڑABتھوڑی گھوم جاتی ھے کیونکه قوت گرد شه اپنی سمت تبدیل کرتا ھے۔ گردشی زادیه کو تجربه کے ذریعے ناپا جاسکتا ھے۔

چھڑABکے سروں پر دو چھوٹے سیسہ کے کرّے جڑے ہوئے ہیں۔ چھڑ کو ایک استوار ٹیک سے پتلی تار کے ذریعہ لٹکایا گیا ہے۔ دو بڑے سیسے کے کرّوں کو ان چھوٹے کرّوں کے قریب لایا گیا ہے لیکن مخالف سمتوں میں (جیسا دکھایا گیا ہے) بڑے کرّے نزدیکی چھوٹے کرّوں کو مساوی اور مخالف قوت کے ساتھ اپنی جانب کھینچتے ہیں۔ چھڑ پر کوئی کل قوت نہیں لگ رہی ہے بلکہ صرف قوت گردشہ کام کر رہا ہے جو چھڑ کی لمبائی اور F کے حاصلِ ضرب کے برابر ہے جہاں F بڑے کرّے اور اس کے نزدیکی چھوٹے کرّے کے درمیان قوت کشش ہے۔ اس قوت گردشہ کی وجہ سے لٹکی ہوئی تار اتنی دیر کے لیے گھومنے لگتی ہے جب تک تار کا بحالی قوت گردشہ مادی کشش کے قوتِ گردشہ کے برابر نہ ہوجائے۔ اگر θ لٹکی ہوئی تار کا مروڑ(Twist) زاویہ ہے تو بحالی قوت گردشہ θ کے متناسب اور τθ کے برابر ہوگا۔ جہاں τ بحالی قوت گردشہ فی اکائی مروڑ زاویہ ہے۔ τ کو آزادنہ طور ناپا جاسکتا ہے جیسے ایک معلوم گردشہ لگا کر مروڑ زاویہ ناپا جائے۔ کرّوں کے درمیان لگ رہی مادی کشش قوت اتنی ہی جیسے کہ ان کی کمیتیں ان کے مرکز پر مرکوز ہیں۔ اس لیے اگر d بڑے اور اسکے نزدیکی چھوٹے کرّے کے مراکز کے درمیان کی دوری ہے، Mاورm انکی کمیتیں ہیں تو بڑے اور نزدیکی چھوٹے کرّوں کے درمیان مادی کشش قوت ہوگی

$$F = G\frac{Mm}{d^2} \qquad (8.6)$$

اگر L چھڑ AB کی لمبائی ہے تو F کے ذریعہ پیدا شدہ قوت گردشہ F اور L کا حاصل ضرب ہوگا۔

متوازن حالت میں یہ بحالی قوت گردشہ کے برابر ہوتا ہے اور اس لیے

$$G\frac{Mm}{d^2}L = \tau\ \theta \qquad (8.7)$$

θ کی پیمائش کرکے ہم G کی قدر اس مساوات کے ذریعہ معلوم کرسکتے ہیں

کیونڈش کے تجربہ کے بعد G کی پیمائش میں درستگی لائی گئی ہے آجکل اس کی قدر لی جاتی ہے

$$G = 6.67\times10^{11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2 \qquad (8.8)$$

8.5 زمین کی مادی کشش قوت کے ذریعہ پیدا ہونے والا اسراع (Acceleration Due To Gravity of The Earth)

زمین کو ہم ایک ایسا کرہ تصور کرسکتے ہیں جو کہ کثیر ہم مرکزی کروی شیلوں پر مشتمل ہے۔ اس میں سب سے چھوٹا شیل زمین کے مرکز پر اور سب سے بڑا شیل زمین کی سطح پر ہوتا ہے۔ جو نقطہ زمین کے باہر ہے، ظاہر ہے کہ وہ ہر شیل کے باہر ہے۔ اس لیے ہر شیل اس نقطہ پر جو ان کے باہر ہے مادی قوت ٹھیک اسی طرح لگاتا ہے جیسے کہ اس کی تمام کمیت ان کے مشترکہ مرکز پر مرکوز ہو، جیسا کے پچھلے حصہ میں ہم نے مطالعہ کیا ہے۔ تمام شیلوں کی کل کمیت

زمین کی کمیت ہے اس لیے زمین سے باہر ایک نقطہ پر لگی مادی کشش قوت ٹھیک وہی ہوگی جیسے کہ زمین کی کل کمیت اپنے مرکز پر مرکوز ہو۔

ایک نقطہ جو زمین کے اندر ہے اس کے لیے حالت مختلف ہوتی ہے۔ یہ شکل 8.7 میں دکھایا گیا ہے

شکل 8.7 کمیت m کسی کان میں زمین (کمیت M_E اور نصف قطر R_E) کی سطح سے d گہرائی پر واقع ہے۔ زمین کو ہم کروی طور پر متشاکل (Spherically symmentric) مانتے ہیں۔

دوبارہ مان لیں کہ زمین پہلے کی طرح ہم مرکزی کروی شیلوں پر مشتمل ہے اور ایک نقطہ کمیت m مرکز سے r دوری پر واقع ہے۔ ایسے شیل کے لیے جس کا نصف قطر r سے زیادہ ہے نقطہ P اندر کی جانب واقع ہوگا۔ اس لیے پچھلے حصہ کے نتیجہ کے مطابق P پر واقع کمیت M پر کوئی بھی مادی کشش قوت نہیں لگائے گی۔ وہ شیل جن کا نصف قطر $<r$ ہیں، نصف قطر r کا کرہ تشکیل دیتے ہیں اور نقطہ P اس کرہ کی سطح پر واقع ہوتا ہے۔ یہ چھوٹا کرہ P پر واقع m کمیت پر جو قوت لگاتا ہے وہ ایسی قوت ہے جیسے کہ اس کی کمیت M_r اس کے مرکز پر مرکوز ہے اس لیے P پر کمیت m پر لگ رہی قوت کی عددی قدر ہے :

$$F = \frac{Gm\ (m_r)}{r^2} \qquad (8.9)$$

ہم مانتے ہیں کہ کل زمین کی کثافت یکساں ہے اس لیے زمین کی کمیت $M_E = \frac{4\pi}{3} R_E^3\ \rho$ ہوگی۔ جہاں M_E زمین کی کمیت ہے، R_E اس کا نصف قطر ہے اور اس کی کثافت ہے۔ دوسری جانب r نصف قطر والے کرّے کی کمیت M_r ہوگی $\frac{4\pi}{3}\rho r^3$، اس لیے

$$F = G m\left(\frac{4\pi}{3}\rho\right)\frac{r^3}{r^2} = G m\left(\frac{M_E}{R_E^3}\right)\frac{r^3}{r^2}$$

$$= \frac{G m M_E}{R_E^{\ 3}}\, r \qquad (8.10)$$

اگر کمیت m زمین کے سطح پر واقع ہو تو $r = R_E$ اور اس پر لگی مادی کشش قوت مساوات (8.10) سے

$$F = G\,\frac{M_E m}{R_E^2} \qquad (8.11)$$

کمیت m کے ذریعہ محسوس کیا گیا اسراع، جسے عام طور پر g سے ظاہر کرتے ہیں، نیوٹن کے دوسرے قانون کے مطابق F سے منسلک ہے: اس طرح

$$g = \frac{F}{m} = \frac{GM_E}{R_E^2} \qquad (8.12)$$

اسراع g بہ آسانی ناپا جا سکتا ہے۔ R_E ایک معلوم قدر ہے، کیونڈش کے یا دیگر تجربہ کے بنیاد پر G کی پیمائش اور g اور R_E کی معلومات سے مساوات (8.12) کے ذریعہ M_E کا تخمینہ لگایا جا سکتا ہے۔ اسی وجہ سے کیونڈش کے بارے میں مشہور قول ہے کہ 'کیونڈش نے زمین کا وزن کر لیا'۔

8.6 زمینی سطح سے نیچے اور اوپر مادی کشش اسراع (Acceleration Due to Gravity Below and Avove the Source of Earth)

مان لیجئے ایک نقطہ کمیت m زمینی سطح سے h اونچائی پر ہے جیسا کہ شکل (8.8(a میں دکھایا گیا ہے۔ زمین کا نصف قطر R_E ہے۔ چونکہ یہ زمین سے باہر ہے اس لیے اس کی دوری زمین کے مرکز سے (R_E+h) ہوگی۔ اگر

(a)

شکل 8.8 (a) زمینی سطح سے h اونچائی پر g
$F(h)$ نقطہ کمیت m پرقوت کی عددی قدر ھے تو ھم مساوات (8.5) سے پاتے ھیں

$$F(h) = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \qquad (8.13)$$

نقطہ کمیت کے ذریعہ محسوس کیا گیا اسراع $F(h)/m = g(h)$ ہے اور ہم پاتے ہیں کہ

$$g(h) = \frac{F(h)}{m} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}. \qquad (8.14)$$

صاف ظاہر ہے کہ یہ سطحِ زمین پر g کی قدر: $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ سے کم ہے۔ $h << R_E$ کے لیے ہم مساوات (8.14) کو اس طرح پھیلا سکتے ہیں

$$g(h) = \frac{GM_E}{R_E^2(1 + h/R_E)^2} = g(1 + h/R_E)^{-2}$$

$\frac{h}{R_E} << 1$ کے لیے دورکنی ریاضیاتی عبارت کے استعمال سے

$$g(h) \cong g\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \qquad (8.15)$$

مساوات (8.15) یہ بتاتی ہے کہ اونچائی h کے لیے g کی قدر $(1 - 2h/R_E)$ جزو ضربی کے ذریعہ کم ہونے لگتی ہے۔

اب ہم زمینی سطح سے نیچے d گہرائی پر نقطہ کمیت m لیتے ہیں (شکل (8.8 (b)۔ اس طرح اس کی دوری زمین مرکز سے $(R_E - d)$ ہے۔ زمین کے بارے میں یہ سوچا جا سکتا ہے کہ یہ نصف قطر $(R_E - d)$ والے چھوٹے کرّے اور موٹائی d کے کرّوی شیل پر مشتمل ہے۔ باہری شیل کے ذریعہ m پر لگی قوت پچھلے حصہ کے نتیجہ کے مطابق صفر ہوگی۔ جہاں تک $(R_E - d)$ نصف قطر والے چھوٹے کرہ کی بات ہے، نقطہ کمیت اس کے باہر ہے۔ اس لیے پچھلے حصہ کے نتیجہ کے مطابق اس چھوٹے کرہ کے ذریعہ لگی قوت ٹھیک اسی طرح ہوگی جیسے کہ چھوٹے کرہ کی کل کمیت مرکز پر مرکوز ہو۔ اگر M_S نسبتاً چھوٹے کرہ کی کمیت ہے تب

$$M_S/M_E = (R_E - d)^3/R_E^3 \qquad (8.16)$$

چونکہ کرہ کی کمیت اس کے نصف قطر کے مکعب کے متناسب ہے اس لیے نقطہ کمیت پر لگی قوت

$$F(d) = GM_S\, m/(R_E - d)^2 \qquad (8.17)$$

درج بالا سے M_S کی قدر رکھنے پر ہم پاتے ہیں

$$F(d) = G M_E\, m\,(R_E - d)/R_E^3 \qquad (8.18)$$

اور اس لیے گہرائی d پر مادی کشش اسراع: $g(d) = F(d)/m$ ہوگا۔

(b)

شکل 8.8(b) گھرائی d پر g اس صورت میں $(R_E\text{-}d)$ نصف قطر والا مقابلتاً چھوٹا کرّہ ھی g کو قدر فراھم کرنے میں شاکل ھوتا ھے۔

$$g(d)=\frac{F(d)}{m}=\frac{GM_E}{R_E^3}(R_E-d)$$

$$=g\frac{R_E-d}{R_E}=g(1-d/R_E) \qquad (8.19)$$

اس لیے جیسے جیسے ہم زمینی سطح سے نیچے کی جانب جاتے ہیں مادی کشش اسراع $(1-d/R_E)$ جزوضربی کے ذریعہ کم ہونے لگتا ہے۔ زمینی کشش کے ذریعہ اسراع کے متعلق اہم بات یہ ہے کہ یہ سطح پر سب سے زیادہ ہوتا ہے اورخواہ اوپر جائیں یا نیچے، یہ کم ہونے لگتا ہے

8.7 مادی کشش توانائی بالقوہ (Grivitational Potential Energy)

ہم اس سے پہلے ہی توانائی بالقوہ کے بارے میں پڑھ چکے ہیں کہ یہ وہ توانائی ہے جوجسم کے اندراس کے مقام/حالت کی مناسبت سے محفوظ ہوتی ہے۔اگر ذرہ کے مقام/حالت میں عامل قوت کے ذریعے تبدیلی آتی ہے تو توانائی بالقوہ میں تبدیلی قوت کے ذریعہ جسم پر کام ہوتا ہے۔جیسا کہ ہم نے پہلے تذکرہ کیا ہے وہ قوتیں جن کے لیے کیا گیا کام راہ کے تابع نہیں ہوتا، برقراری قوتیں (Conservative Force) کہلاتی ہیں۔

قوت مادی کشش بھی ایک برقراری قوت ہے۔ہم اس قوت سے پیدا شدہ جسم کی توانائی بالقوہ کا تخمینہ لگا سکتے ہیں جسے مادی کشش توانائی بالقوہ کہتے ہیں۔ زمینی سطح کے نزدیک کچھ نقاط مان لیجئے جن کی سطح سے دوری زمین کے نصف قطر کے مقابلے میں بہت کم ہے۔ایسی صورت میں مادی کشش عملی طور پر مستقلہ ہوگی، جس کی عددی قدر ایک مستقلہ mg کے برابر اور سمت زمین کے مرکز کی جانب ہوتی ہے۔ اگر ہم زمین کی سطح سے h_1 اونچائی پر ایک نقطہ لیتے ہیں اور دوسرا نقطہ ٹھیک اوپر عمودی سمت میں سطح سے h_2 اونچائی پر ہے تو پہلے سے دوسرے مقام تک m کمیت والے ذرہ کو لے جانے میں کیا گیا کام W_{12} ہوگا۔

$$W_{12} = \text{قوت} \times \text{نقل}$$

$$= mg(h_2-h_1) \qquad (8.20)$$

اگر ہم سطح کے اوپر h اونچائی پر ایک نقطہ سے توانائی بالقوہ $w(h)$ منسلک کرتے ہیں

$$W(h)=mgh+W_0 \qquad (8.21)$$

جہاں W_0 مستقلہ ہے۔اس سے صاف ظاہر ہے :

$$W_{12}=W(h_2)-W(h_1) \qquad (8.22)$$

ذرہ کی حرکت میں کیا گیا کام ابتدائی اور آخری حالت کے درمیان توانائی بالقوہ کا فرق ہے۔غور کریں کہ مساوات (8.22) میں مستقلہ W_0 ختم ہو جاتا ہے۔مساوات (8.21) میں اگر $h=0$ رکھا جائے تو $W(h=0)=W_0$ ہوگا۔ $h=0$ کا مطلب ہے کہ نقطہ زمین کے سطح پر ہے اس لیے زمین کے سطح پر توانائی بالقوہ W_0 ہے

اگر ہم زمین کے سطح سے کسی بھی دوری پر ایک نقطہ لیں تو درج بالا نتیجہ صحیح نہیں ہوگا۔کیونکہ مفروضہ، مادی کشش mg مستقلہ ہے، درست نہیں ہوگا۔ بہرحال ہم اپنی اس بحث سے یہ جانتے ہیں کہ زمین سے باہر ایک نقطہ پر لگی مادی کشش قوت جو زمین کے مرکز کی جانب ہوتی ، ہے:

$$F=\frac{GM_Em}{r^2} \qquad (8.23)$$

جہاں M_E زمین کی کمیت، m ذرہ کی کمیت ہے اور r زمین کے مرکز سے دوری ہے۔اگر ہم ایک ذرہ کو $r=r_1$ سے $r=r_2$ $(r_2>r_1)$ تک ایک عمودی سمت میں لے جانے میں کئے گئے کام کا حساب لگائیں تو بجائے مساوات (8.20) کے

$$W_{12}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{GMm}{r^2}dr$$

$$=-GM_E m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad (8.24)$$

مساوات (8.21) کی جگہ r دوری پر توانائی بالقوہ $W(r)$ اب

$$W(r)=-\frac{GM_E m}{r}+W_1,$$

جو $r>R$ کے لیے درست ہے۔ $W_{12} = W(r_2) - W(r_1)$ آخری مساوات میں r کو لامتناہی رکھنے پر $W_1 = (r = \text{لامتناہی})W$ ہوگا اس لیے W_1 لامتناہی r پر توانائی بالقوۃ ہوتی ہے۔ خیال رہے کہ دو نقطوں کے درمیان توانائی بالقوۃ کا صرف فرق ہی ایک متعین معنی کے ساتھ مساوات (8.22) اور مساوات (8.24) میں استعمال ہوا ہے ہم عام طور سے W_1 کو صفر مان لیتے ہیں، اس طرح کسی نقطہ پر توانائی بالقوۃ، ذرہ کو لاانتہا سے اس نقطہ تک منتقل کرنے میں کیا گیا کام ہے۔

ہم نے مادی کشش کی قوتوں کے ذریعے، ایک ذرے کی ایک نقطہ پر، توانائی بالقوۃ کی تحسیب کی ہے۔ زمین کی مادی کشش کی وجہ سے پیدا ہونے والے مادی کشش بالقوۃ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ یہ اس نقطہ پر ایک اکائی کمیت کے ذرے کی توانائی بالقوۃ ہے پچھلی گفتگو سے ہم نے یہی سیکھا ہے کہ m_1 اور m_2 کمیت والے دو ذرات جن کی درمیانی دوری r ہے، کے لیے مادی کشش توانائی بالقوۃ ہوگی :

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

(اگر ہم $r \to 0$ پر $v = 0$)

یہ خیال رہے کہ ذرات کے ایک جداگانہ نظام کی کل توانائی بالقوۃ اس کے سبھی ممکنہ جوڑوں کے درمیان کی توانائی بالقوۃ کی جمع ہوتی ہے۔ یہ انطباق کے اصول (Superposition Principle) کی ایک مثال ہے۔

> **مثال 8.3** ضلع l والے مربع کے راسوں پر چار ذرے رکھے ہوئے ہیں۔ اس نظام کی توانائی بالقوۃ معلوم کیجیے۔ مربع کے مرکز پر بھی توانائی بالقوۃ کی تحسیب کیجیے

جواب مان لیجیے m کمیت کی چار کمیتیں ضلع l والے مربع کی راسوں پر رکھی ہوئی ہیں۔ (دیکھیں شکل 8.9) ہمارے پاس l دوری والے چار اور $\sqrt{2}\,l$ دوری والے دو جوڑے ہیں اس لیے

$$W(r) = -4\frac{G\,m^2}{l} - 2\frac{G\,m^2}{\sqrt{2}\,l}$$

شکل 8.9

$$= -\frac{2\,G\,m^2}{l}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -5.41\frac{G\,m^2}{l}$$

مربع کے مرکز پر مادی کشش توانائی بالقوۃ $(r = \sqrt{2}\,l/2)$ ہوگی

$$U(r) = -4\sqrt{2}\,\frac{G\,m}{l}$$

8.8 چال فرار (Escape Speed)

اگر ایک پتھر کو ہاتھ سے پھینکا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ یہ زمین پر واپس آ جاتا ہے۔ مشین کے ذریعہ ایک چیز کو ہم بہت زیادہ ابتدائی چال سے بہت زیادہ اونچائی تک پھینک سکتے ہیں۔ ایک قدرتی بات جو ہمارے ذہن میں پیدا ہوتی ہے وہ درج ذیل ہے: کیا ہم کسی چیز کو اتنی زیادہ ابتدائی چال سے اوپر پھینک سکتے ہیں کہ وہ واپس زمین پر نہ آئے؟

توانائی کی بقاء کا اصول اس سوال کے جواب کے حصول میں ہماری مدد کرتا ہے۔ مان لیجیے چیز لاانتہا ہی تک پہنچ گئی اور اس وقت اس کی چال V_1 ہے۔ کسی چیز کی کل توانائی، اس کی بالقوۃ اور حرکی توانائیوں کا حاصلِ جمع ہوگا۔ جیسا کہ پہلے بتایا گیا ہے W_1 کسی چیز کا لاانتہا پر مادی کشش توانائی

بالقوۃ ہے لاانتہا پر وجیکٹائل کی کل توانائی ہوگی۔

$$E(\infty) = W_1 + \frac{mV_f^2}{2} \qquad (8.26)$$

اگر شے کو ایک نقطہ سے جو زمین کے مرکز سے $(h + R_E)$ دوری پر ہے V_1 چال سے اوپر کی جانب پھینکا جائے تو اس کی ابتدائی توانائی تھی:

$$E(h+R_E) = \frac{1}{2}mV_i^2 - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} + W_1 \qquad (8.27)$$

جہاں R_E زمین کا نصف قطر ہے۔ توانائی کی بقاء کے اصول کے مطابق مساوات (8.26) اور (8.27) دونوں برابر ہیں اس لیے

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} = \frac{mV_f^2}{2} \qquad (8.27)$$

اس مساوات میں دائیں ہاتھ کی جانب ایک مثبت مقدار ہے جس کی کم از کم قیمت صفر ہو سکتی ہے اور یہی بائیں ہاتھ کی جانب بھی ہوگا۔ اس طرح ایک چیز لاانتہا تک جب ہی پہنچ سکتی ہے جب کہ V_i اس طرح ہو

$$\frac{mV_i^2}{2} - \frac{GmM_E}{(h+R_E)} \geq 0 \qquad (8.29)$$

V_i کی کم از کم قدر اس وقت ہوگی جب مساوات (8.29) کے بائیں ہاتھ کی جانب صفر کے برابر کر دی جائے گی۔ اس لیے ایک چیز کو لاانتہا تک لے جانے کے لیے کم از کم درکار چال (یعنی زمین سے فرار) ہوگی

$$\frac{1}{2}m\left(V_i^2\right)_{min} = \frac{GmM_E}{h+R_E}$$

اگر ایک چیز زمین کی سطح سے اوپر کی جانب پھینکی گئی ہے تو $h=0$ ہوگا یعنی

$$(V_i)_{min} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \qquad (8.31)$$

ہم جانتے ہیں $g = GM_E / R_E^2$ لہٰذا،

$$(V_i)_{min} = \sqrt{2gR_E} \qquad (8.32)$$

g اور R_E کی عددی قیمت رکھنے پر، $(V_i)_{min} \approx 11.2$ km/s

یہ چال فرار یا رفتار فرار (دراصل چال کہنا مناسب ہے) کہلاتی ہے۔

مساوات (8.32) کا استعمال ایک چیز کو چاند کی سطح سے پھینکے جانے کے لیے بھی کر سکتے ہیں۔ یہاں g چاند کی مادی کشش قوت کے ذریعہ اس کی سطح پر پیدا ہونے والا اسراع ہے اور r_E چاند کا نصف قطر ہے۔ یہ دونوں زمین کے مقابلے کم ہیں اور چاند کے لیے چال فرار 2.3 km/s ہے جو کہ تقریباً پانچ گنا کم ہے۔ یہی وجہ ہے کہ چاند پر کوئی کرہ باد نہیں ہے۔ چاند کے سطح پر گیس سالمہ اگر بنتا ہے اور اس کی رفتار اس سے زیادہ ہو تو وہ چاند کی مادی کشش قوت سے فرار ہو جائے گا۔

مثال 8.4 دو مساوی نصف قطر *R* لیکن کمیت *m* اور 4m والے یکساں ٹھوس کرے اس طرح رکھے ہیں کہ ان کے مراکز کے بیچ کی دوری شکل 8.10 کے مطابق 6R ہے۔ دونوں کروں کو قائم کر دیا گیا ہے۔ *M* کمیت والے کرہ کی سطح سے m کمیت کا کوئی پروجکٹائل دوسرے کرہ کے مرکز کی طرف سیدھا پھینکا گیا ہے پروجکٹائل کی اس کم ترین چال V کے لیے ریاضیاتی عبارت حاصل کیجئے کہ جس سے وہ دوسرے کرے کی سطح تک پہونچ جائے۔

شکل 8.10

جواب پروجکٹائل پر دونوں کروں کے سبب، ایک دوسرے کی باہمی مخالف، دو مادی کشش قوتیں کام کر رہی ہیں۔ تعدیلی نقطہ N (شکل 8.10) ایک ایسا نقطہ ہے جہاں دونوں قوتیں ایک دوسرے کو مکمل طور پر رد کر دیتی ہیں۔ اگر ON = r ہے تو

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{4GMm}{(6R-r)^2}$$

$$(6R - r)^2 = 4r^2$$

$$6R - r = \pm 2r$$

$r = 2R$ یا $-6R$

اس مثال میں تعدیلی نقطہ $r=-6R$ کی ہمارے لیے کوئی اہمیت نہیں ہے اس طرح $ON = r = 2R$، لہٰذا ذرے کو اتنی چال سے پھینکنا کافی ہوگا کہ وہ N نقطے پر پہنچ جائے۔ اس کے آگے کمیت 4M کی نسبتاً زیادہ مادی قوت کشش کافی ہوگی۔ M کی سطح پر میکانکی توانائی

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{4GMm}{5R}$$

تعدیلی نقطہ N پر چال صفر کے نزدیک تر پہنچ جاتی ہے۔ نقطہ N پر میکانکی توانائی خالصتاً بالقوۃ ہوتی ہے۔

$$E_N = -\frac{GMm}{2R} - \frac{4GMm}{4R}$$

میکانکی توانائی کی بقا کے اصول کے مطابق

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R} - \frac{4GM}{5R} = -\frac{GM}{2R} - \frac{GM}{R}$$

یا

$$v^2 = \frac{2GM}{R}\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$v = \left(\frac{3GM}{5R}\right)^{1/2}$$

یہاں غور کرنے کی بات یہ ہے کہ N نقطے پر پروجکٹائل کی چال صفر ہوتی ہے لیکن جب وہ بھاری کرہ 4M سے ٹکراتا ہے تو چال صفر نہیں ہوتی۔ اس چال کا شمار ہم طلبا کو ایک مشق کے طور پر کرنے کے لیے دے رہے ہیں۔

8.9 زمینی ذیلی سیارہ (Earth Satellites)

زمینی ذیلی سیارے وہ اجسام ہیں جو زمین کے گرد طواف کرتے ہیں۔ ان کی حرکت سورج کے گرد سیاروں کی حرکت کے مشابہ ہے۔ اس لیے سیاری حرکت کے کیپلر کے قانون یہاں بھی لاگو ہوں گے۔ خاص بات یہ ہے کہ زمین کے گرد ان کا مدار دائری یا ناقص ہوتا ہے۔ چاند زمین کا واحد قدرتی ذیلی سیارہ ہے، جس کا مدار تقریباً دائری ہے دوری وقفہ 27.3 دن ہے۔ اور تقریباً یہی، چاند کا گردشی دور خود اپنے محور کے گرد ہے 1957 سے آج تک نئی ٹکنالوجی کی ترقی کی بناء پر ہندوستان سمیت دیگر ممالک نے بھی مصنوعی زمینی ذیلی سیارے خلا میں بھیجے ہیں۔ انہیں اطلاعات، زمینی تحقیقات اور موسمیات وغیرہ جیسے میدانوں میں استعمال کیا جا رہا ہے۔

ہم ایک ذیلی سیارہ کو دائری مدار میں زمین کے مرکز سے (R_E+h) دوری پر فرض کیے لیتے ہیں جہاں R_E زمین کا نصف قطر ہے۔ اگر m ذیلی سیارہ کی کمیت اور V اس کی چال ہے تو اس مدار کے لیے درکار مرکز جو قوت مرکز کی جانب ہوگی اور اس کی عددی قدر ہوگی:

$$F(\text{مرکز جو}) = \frac{m.V^2}{(R_E+h)} \qquad (8.33)$$

یہ مرکز جو قوت مادی کشش قوت کے ذریعہ حاصل ہوتی ہے، جو ہے:

$$F(\text{مادی کشش}) = \frac{GmM_E}{(R_E+h)^2} \qquad (8.34)$$

جہاں M_E زمین کی کمیت ہے۔ مساوات (8.33) اور (8.34) کے دائیں ہاتھ والے حصے برابر کرنے پر

$$V^2 = \frac{GM_E}{(R_E+h)} \qquad (8.35)$$

اس طرح h بڑھانے پر V کم ہو جائیگی۔ مساوات (8.35) سے $h=0$ پر چال V ہوگی

$$V^2 \quad (h=0) = GM/R_E = gR_E \qquad (8.36)$$

جہاں ہم نے رشتہ: $g = \frac{GM_E}{R_E^2}$ استعمال کیا ہے۔ ہر مدار میں ذیلی سیارہ v چال کے ساتھ $2\pi(R_E+h)$ دوری طے کرتا ہے۔ اس لیے اس کا دوری وقت T ہوگا۔

$$T = \frac{2\pi(R_E+h)}{V} = \frac{2\pi(R_E+h)^{3/2}}{\sqrt{GM_E}} \qquad (8.37)$$

مساوات (8.25) سے V کی قدر رکھنے پر اور مساوات (8.37) کو دونوں جانب مربع کرنے پر

$$T^2 = k\ (R_E + h)^3 \quad (8.38)$$

جہاں $k = 4\pi^2/GM_E$ ہے۔ یہی کیپلر کے دوری وقتوں کے قانون کی وہ شکل ہے جو زمین کے گرد ذیلی سیاروں کی حرکت میں استعمال ہوتی ہے۔ ایک ذیلی سیارہ جو زمینی سطح سے بہت ہی قریب ہو اس کے لیے h کو R_E کے مقابلہ میں نظرانداز کیا جا سکتا ہے۔ (مساوات 8.38) اس لیے اس ذیلی سیارہ کے لیے T، T_0 بن جاتا ہے۔ جہاں

$$T_0 = 2\pi\sqrt{R_E / g} \quad (8.39)$$

اگر ہم g اور R_E کی قیمتیں رکھیں تو $g \approx 9.8\ ms^{-2}$ اور $R_E = 6400km$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{6.4\times10^6}{9.8}}\ s$$

جو تقریباً 85 منٹ کے برابر ہے

مثال 8.5 سیارہ مریخ کے دو چاند ہیں جن کے نام فوبوس اور ڈیموس ہیں (i) فوبوس کا دور 7 گھنٹے 39 منٹ ہے اور مداری نصف قطر $9.4\times103km$ ہے۔ سیارہ مریخ کی کمیت تحسیب کیجیے۔ (ii) مان لیجیے کہ زمین اور مریخ سورج کے اطراف دائری مداروں میں طواف کرتے ہیں اور مریخ سیارے کا مدار زمین کے مدار کے نصف قطر کا 1.52 گنا ہے ۔ مریخ سال کی مدت دنوں میں تحسیب کیجیے۔

جواب (i) مساوات (8.38) میں سورج کی کمیت کا بدل سیارہ مریخ کی کمیت M_m سے کرنے پر

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_m}R^3$$

$$M_m = \frac{4\pi^2}{G}\frac{R^3}{T^2}$$

$$= \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times10^{-11}\times(459\times60)^2}$$

$$M_m = \frac{4\times(3.14)^2\times(9.4)^3\times10^{18}}{6.67\times(4.59\times6)^2\times10^{-5}}$$

$$= 6.48\times 10^{23}\ kg$$

(ii) کیپلر کے تیسرے قانون کا استعمال کر کے ہم درج ذیل طریقے سے T_m کی قدر معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}$$

یہاں R_{MS} مریخ سورج کی درمیانی دوری اور R_{ES} زمین سورج کی درمیانی دوری ہے۔

$$\therefore\ T_m = \left(\frac{R_{MS}^3}{R_{ES}^3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$T_M = (1.52)^{3/2}\times365$$

$$684 = (\text{دن})$$

یہاں غور کرنے کی بات ہے عطارد، مریخ اور پلوٹو کو چھوڑ کر دیگر سبھی سیاروں کے مدار تقریباً دائری ہیں۔ مثال کے لیے زمین کے نصف اصغر اور نصف اکبر محوروں کا تناسب $b/a=0.99986$

مثال 8.6 زمین کو تولنا: آپ کو درج ذیل اعداد شمار دیے گئے ہیں $g = 9.81\ ms^2$، $R_E=6.37\times10^6 m$ زمین کے مرکز سے چاند کی دوری، $R=3.84\times10^8\ m$ اور چاند کے طواف کا دور 27.3 دن۔ دو مختلف طریقوں کے ذریعہ زمین کی کمیت M_E معلوم کیجیے۔

جواب مساوات 8.12 سے

$$M_E = \frac{g R_E^2}{G}$$

$$= \frac{9.81 \times \left(6.37 \times 10^6\right)^2}{6.67 \times 10^{-11}}$$

$$= 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

چاند زمین کا ایک ذیلی سیارہ ہے۔کیپلر کے تیسرے قانون سے (مساوات 8.38)دیکھیں)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{G M_E}$$

$$M_E = \frac{4\pi^2 R^3}{G T^2}$$

$$= \frac{4 \times 3.14 \times 3.14 \times (3.84)^3 \times 10^{24}}{6.67 \times 10^{-11} \times (27.3 \times 24 \times 60 \times 60)^2}$$

$$= 6.02 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

ان نتیجوں میں 1% سے بھی کم فرق ہے۔لہٰذا دونوں طریقوں سے تقریباً ایک ہی جواب حاصل ہوتا ہے۔

مثال 8.7 مساوات (8.38) کے مستقلہ K کو دنوں اور کلومیٹر میں ظاہر کیجیے۔ دیا ہے کہ چاند زمین سے 3.84×10^5 km دوری پر ہے۔اس کے طواف کا دور (دنوں میں) معلوم کیجیے

جواب دیا ہوا ہے۔

$$k = 10^{-13}\ \text{s}^2\ \text{m}^{-3}$$

$$= 10^{-13} \left[\frac{1}{(24 \times 60 \times 60)^2}\text{d}^2\right]\left[\frac{1}{(1/1000)^3\ \text{km}^3}\right]$$

$$= 1.33 \times 10^{14}\ \text{d}^2\ \text{km}^{-3}$$

مساوات (8.38) اور k کی دی ہوئی قدر کا استعمال کرنے پر چاند کا طوافی دور

$$T^2 = (1.33 \times 10^{14})(3.84 \times 10^5)^3$$

$$T = 27.3\ \text{d}$$

غور کیجیے کہ اگر (R_E+h) کو ہم ناقص کا نصف محور اکبر مان لیں تو مساوات 8.38 ناقص مدار کے لیے بھی لاگو ہوتی ہے۔ایسی حالت میں زمین اس ناقص کے ایک ماسکہ پر واقع ہوگی۔

8.10 ایک مدار میں طواف کرتے ہوئے سیارچہ کی توانائی (Energy of An Orbiting Satellite)

مساوات (8.35) کے استعمال سے ایک دائری مدار میں V چال سے حرکت کرتا ہوا ذیلی سیارہ (سیارچے) کی حرکی توانائی ہوگی

$$K.E = \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{G m M_E}{2(R_E + h)} \qquad (8.40)$$

مان لیجیے لاانتہا پر مادی کشش توانائی بالقوۃ صفر ہے۔زمین کے مرکز سے $(R+h)$ دوری پر توانائی بالقوۃ ہوگی

$$P.E = -\frac{G m M_E}{(R_E + h)} \qquad (8.41)$$

حرکی توانائی مثبت ہے جب کہ توانائی بالقوۃ منفی ہے۔ بہرحال عددی قدر کے اعتبار سے حرکی توانائی، توانائی بالقوۃ کی نصف ہے۔اس لیے کل توانائی

$$E = K.E + P.E = -\frac{G m M_E}{2(R_E + h)} \qquad (8.42)$$

دائری مدار میں حرکت کرتے ہوئے سیارچے کی کل توانائی منفی ہے، کیونکہ توانائی بالقوۃ جو حرکی توانائی کی، عددی قدر کی مناسبت سے دگنی ہے، منفی ہے۔

جب سیارچے ناقص مدار میں ہوتے ہیں تو دونوں توانائیوں K.E اور P.E ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک بدلتی رہتی ہیں۔دائری مدار کی طرح ناقص مدار میں بھی کل توانائی مستقلہ اور منفی ہوتی ہے۔ یہ جو ہمارا اندازہ بھی ہے چونکہ پچھلے حصہ میں ہم پڑھ چکے ہیں کہ اگر کل توانائی مثبت یا صفر ہو تو شے لاانتہا تک فرار ہو جاتی ہے۔سیارچے ہمیشہ ہی زمین سے ایک محدود دوری پر ہوتے ہیں اور ان لیے اس کی توانائی مثبت یا صفر نہیں ہو سکتی۔

مثـــال 8.8 400 kg کا کوئی ذیلی سیارہ زمین کے اطراف $2R_E$ نصف قطر والے کسی دائری مدار میں طواف کر رہا ہے اسے $4R_E$ نصف قطر والے دائری مدار میں منتقل کرنے کے لیے کتنی توانائی کی ضرورت ہوگی؟ اس کی حرکی توانائی اور توانائی بالقوۃ میں کتنی تبدیلی ہوگی؟

جواب شروع میں

$$E_i = -\frac{G M_E m}{4 R_E}$$

جب کہ آخر میں

$$E_f = -\frac{G M_E m}{8 R_E}$$

لہٰذا توانائی میں کل تبدیلی

$$\Delta E = E_f - E_i$$

$$= \frac{G M_E m}{8 R_E} = \left(\frac{G M_E}{R_E^2}\right)\frac{m R_E}{8}$$

$$\Delta E = \frac{g\, m\, R_E}{8} = \frac{9.81 \times 400 \times 6.37 \times 10^6}{8} = 3.13 \times 10^9 \text{ J}$$

حرکی توانائی میں کمی آجاتی ہے اور ΔE کے مشابہ ہوجاتی ہے۔یعنی

$$\Delta K = K_f - K_i = -3.13 \times 10^9 \text{ J}$$

توانائی بالقوۃ میں تبدیلی کل توانائی میں تبدیلی کی دوگنی ہوتی ہے۔یعنی

$$\Delta V = V_f - V_i = -6.25 \times 10^9 \text{ J}$$

8.11 قائم ارضی اور قطبی ذیلی سیارے

(Geostationary And Polar Satellites)

ایک دلچسپ بات جب پیدا ہوتی ہے اگر (R_E+h) کی قدر اس طرح تطبیق (adjust) کی جائے کہ مساوات (8.37) میں T کی قدر 24 گھنٹے

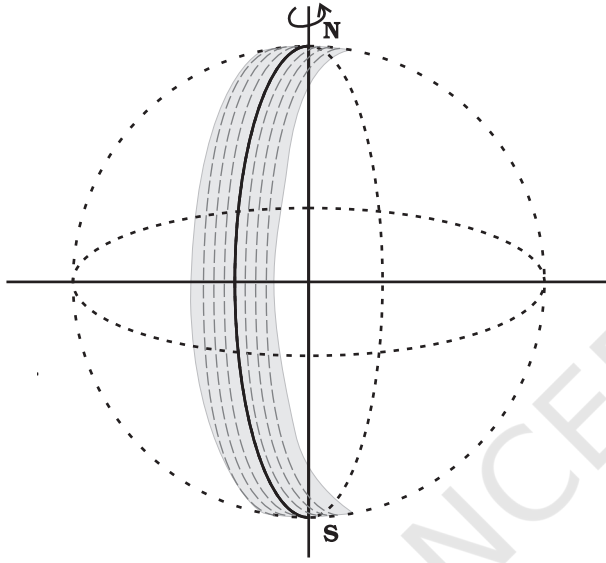
خلا میں ہندوستان کی چھلانگ

1975 میں نچلی مداری ذیلی سیارہ آریہ بھٹ کو لانچ کرنے کے ساتھ ہندوستان خلائی دور میں داخل ہوا۔ پروگرام کے کچھ پہلے برسوں میں سابق سویت یونین نے لانچ گاڑیاں فراہم کی تھیں۔ ملکی لانچ گاڑیوں کا استعمال، 1980 کے دہے کے شروعات میں، روہنی سلسلے کے ذیلی سیاروں کو خلا میں بھیجنے میں کیا۔ قطبی سیاروں کو خلا میں لانچ کرنے کا پروگرام 1980 کی دہائی کے آخری سالوں میں شروع کیا گیا۔ ذیلی سیاروں کا ایک سلسلہ، جسے آئی آر ایس (انڈین ریموٹ سینسنگ سیٹلا سیٹس) کا نام دیا گیا ہے، لانچ کیا جانا شروع ہو چکا ہے اور امید کی جاتی ہے کہ یہ پروگرام مستقبل میں بھی چلتا رہے گا۔ ان ذیلی سیاروں کا استعمال سروے، موسم کی پیش گوئی اور خلاء میں تجربات کو انجام دینے میں ہو رہا ہے۔ مواصلات اور موسم کی پیش گوئی کے مقصد سے انسیٹ (انڈین نیشنل سیٹلا ئٹ INSAT) سلسلے کے ذیلی سیاروں کے پروگرام کی شروعات 1982 میں ہوئی۔ انسیٹ سلسلے کے ذیلی سیاروں کی لانچنگ میں یوروپی گاڑیوں کا استعمال کیا گیا۔ ہندوستان نے 2001 میں اس اپنی سرزمین پر قائم ارضی سیارچہ کے لانچ کی استعداد کی جانچ تب انجام دی جب اس نے ایک تجرباتی مواصلاتی ذیلی سیارہ (GSAT-I) کو خلا میں بھیجا۔ 1984 میں راکیش شرما کو پہلا ہندوستانی خلائی مسافر بننے کی خوش نصیبی حاصل ہوئی۔ ہندوستانی خلائی تحقیق تنظیم (انڈین اسپیس ریسرچ آرگنائزیشن ISRO) وہ سرپرست تنظیم ہے جس کے ذریعہ متعدد مراکز چلائے جا رہے ہیں۔ اس کا اہم لانچ مرکز شری ہری کوٹا (SHAR) ہے جو چنئی سے 100km شمال میں واقع ہے۔ نیشنل ریموٹ سینسنگ ایجنسی (NRSA) حیدرآباد کے قریب واقع ہے۔ خلائی اور متعلقہ سائنس سے متعلق تحقیق کے لیے اس کا قومی مرکز احمد آباد میں واقع فزیکل ریسرچ لیبارٹری (PRL) ہے۔

ہوجائے۔ اگر دائری مدار زمین کی استوائی (equatorial) سطح میں ہو تو ایسے ذیلی سیارہ کی مداری مدت زمین کے لیے اپنے محور کے گرد گردشی مدت کے برابر ہوگی اور زمین سے دیکھنے پر یہ ساکت حالت میں نظر آئے گا۔ اس کے لیے (R_E+h) کا تخمینہ R_E سے کافی زیادہ ہوتا ہے:

$$R_E + h = \left(\frac{T^2\, G\, M_E}{4\pi^2}\right)^{1/3} \qquad (8.43)$$

اگر گھنٹہ T=24 ہو تو h = 35800 km کلومیٹری حاصل ہوتا ہے جو R_E سے کافی زیادہ ہے۔ اس طرح کے ذیلی سیارے کو جو زمین کی استوائی سطح میں ہوتا ہے اور جس کے لیے، گھنٹہ T= 24، ہوتا ہے قائم ارضی سیارہ کہتے ہیں۔ ظاہر ہے چونکہ زمین بھی اسی دوری وقت سے گھومتی ہے اس لیے زمین سے دیکھنے پر یہ ذیلی سیارہ ساکت حالت میں نظر آئے گا۔ اس طرح کے ذیلی سیاروں کو طاقتور راکٹ کی مدد سے زمین سے اوپر اتنی اونچائی تک لانچ کرایا جاتا ہے۔ ان سیاروں کے استعمال سے بہت سارے فائدہ حاصل ہوتے ہیں۔

یہ معلوم ہے کہ ایسی برق مقناطیسی لہر (Electromegnetic Wave) جس کا تعدد ایک متعین تعدد (Frequency) سے زیادہ ہو آئنوسفیر سے ٹکرا کر منعکس نہیں ہوتی۔ ریڈیو نشریات کے لیے استعمال ہونے والی ریڈیو لہروں کا تعدد 2Mhz سے 10Mhz تک ہوتا ہے جو متعین تعدد سے کم ہے اس لیے یہ آئینوسفیر سے ٹکرا کر واپس آجاتی ہیں۔ اس طرح انٹینا سے نشر کی گئی ریڈیو لہریں بہت دوری پر کسی بھی جگہ حاصل کی جاسکتی ہیں جو کہ کسی بھی براہِ راست لہر کے لیے زمینی انحنا (curvature) کے باعث حاصل کر پانا ممکن نہیں ہے۔ ٹیلی ویژن نشریات میں اور دیگر مواصلات میں استعمال کی گئی لہروں کا تعدد کہیں زیادہ ہوتا ہے، اس لیے انہیں خط بصارت (Line of Sight) کے باہر حاصل نہیں کیا جا سکتا۔ ایک قائم ارضی سیارہ نشریاتی اسٹیشن کے اوپر متعین کر دیا جاتا ہے جو ان سگنل کو حاصل کر کے زمین کے بڑے رقبہ میں واپس بھیج دیتا ہے۔ ہندوستان کے ذریعہ اوپر بھیجا گیا INSAT ذیلی سیارہ ایک قائم ارضی ذیلی سیارہ ہی ہے جسے مواصلات اور موسم کی پیش گوئی کے لیے استعمال کیا جاتا ہے

شکل 8.11 ایک قطبی ذیلی سیارہ : زمینی سطح پر ایک پٹی ایک دور کے دوران ذیلی سیارہ سے دکھائی دیتی ھے۔ ذیلی سیارہ کے دوسرے دور کے لیے زمین اپنی محور پر تھوڑی گھوم جاتی ھے تاکہ اس کے بعد والی پٹی دکھائی دے سکے

دوسری طرح کا ذیلی سیارہ قطبی ذیلی سیارہ (شکل 8.11) کہلاتا ہے۔ یہ کم اونچائی $(h \approx 500$ سے $800\, km)$ والا ذیلی سیارہ ہے یہ شمال وجنوب سمت میں زمین کے قطبین کے گرد چکر لگاتا ہے۔ جب کہ زمین اپنے محور کے گرد مشرق و مغرب سمت میں گھومتی ہے۔ چونکہ اس کا دوری وقت تقریباً 100 منٹ ہے اس لیے ایک دن میں ایک ہی اونچائی کو کئی بار پار کرتا ہے۔ بہر حال چونکہ اس کی اونچائی H زمین سے اوپر تقریباً 800-500 کلو میٹر ہے اس لیے اس پر متعین کیا گیا کیمرہ ایک متعین مدار میں زمین کی ایک چھوٹی پٹی ہی دیکھ پائے گا۔ اس کے بعد والی پٹی دوسرے مدار میں نظر

آ ئیگی۔اس طرح پوری زمین کو دن بھر میں پٹی بہ پٹی کے سہارے دیکھا جا سکتا ہے۔یہ ذیلی سیارے قطبی اور استوائی علاقے کو بہت ہی قریب سے اور صاف دیکھ سکتے ہیں۔اس طرح کے ذیلی سیاروں کے ذریعہ حاصل کی گئی خبریں ریموٹ سینسینگ،موسم کی جانکاری،آب وہوا سے متعلق مطالعہ میں کافی کارآمد ثابت ہوئی ہیں۔

8.12 بے وزنی (Weightlessness)

ایک چیز کا وزن وہ قوت ہے جس سے زمین اس کو کھینچتی ہے۔جب ہم زمین کی سطح پر کھڑے ہوتے ہیں تو اپنا وزن محسوس کر سکتے ہیں کیونکہ زمین مخالف سمت میں ایک قوت ہمارے وزن پر لگاتی ہے تا کہ ہم حالت سکون میں رہیں۔یہی اصول وہاں بھی لاگو ہوگا جب ہم کمانی دار ترازو کو ایک متعین نقطہ (جیسے چھت) سے لٹکا کر کسی چیز کا وزن معلوم کریں۔چیز نیچے کی طرف گر جائے گی جب تک کوئی قوت زمین کی قوت کشش کے مخالف سمت میں نہ ہو۔یہی قوت کمانی چیز پر لگاتی ہے۔

یہ تصور کریں کہ ترازو کا اوپری حصہ کمرہ کی کسی چھت سے لٹکا ہوا نہیں ہے۔ترازو کے دونوں کنارے اور رکھی ہوئی چیز یکساں اسراع g کے ساتھ حرکت کریں گے۔ترازو کی کمانی چونکہ تنی ہوئی نہیں ہے اور کوئی قوت اوپر کی جانب نہیں لگ رہی ہے اس لیے ترازو کی ریڈنگ صفر ہوگی۔اگر اسی چیز کی جگہ کوئی انسان ہو تو اسے اپنا وزن محسوس نہیں ہوگا اس لیے جب کوئی چیز آزادانہ گرتی ہے تو بے وزن معلوم ہوتی ہے۔اسی کو بے وزنی کہتے ہیں۔

زمین کے گرد ذیلی سیارہ میں ذیلی سیارہ کا ہر حصہ زمین کے مرکز کی جانب اسراع کرتا ہے جو زمین کی قوت کشش کے ذریعہ اسراع کے برابر ہے۔اس لیے ذیلی سیارہ کے اندر ہر چیز آزادنہ طور پر گرے گی۔یہ اسی طرح ہے جس طرح ہم کسی اونچائی سے زمین کی جانب آزادانہ گرتے ہیں۔اس طرح گردش کرتے ہوئے ذیلی سیارہ کے اندر انسان کوئی مادی کشش محسوس نہیں کریگا۔مادی کشش ہمارے لیے عمودی سمت میں ہوتی ہے جب انکے لیے افقی یا عمودی سمت میں ہوتی ہے۔ایک ذیلی سیارہ کے اندر تیرتے ہوئے خلاءباز کی تصویر اس کی تصدیق کرتی ہے۔

خلاصہ

1۔ نیوٹن کا مادی کشش کا ہمہ گیر قانون یہ بتاتا ہے کہ ایک دوسرے سے r دوری پر واقع m_1 اور m_2 کمیت کے دو ذرات کے درمیان لگنے والی ثقلی کشش قوت کی قدر مندرجہ ذیل ہوتی ہے۔

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

جہاں G ہمہ گیر مادی کشش مستقلہ ہے جس کی قدر 6.672×10^{-11} N m^2 kg^{-2} ہوتی ہے۔

2۔ اگر ہم کئی کمیتوں $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$ وغیرہ کے سبب m کمیت کے کسی ذرے پر حاصل قوت معلوم کرنا چاہتے ہیں تو ہم انطباق کے اصول کا استعمال کرتے ہیں۔تصور کیجیے کہ مادی کشش کے قانون سے $M_1, M_2, \ldots\ldots M_n$ کمیتوں میں ہر ایک کے سبب m کمیت پر لگی الگ الگ قوت $F_1, F_2, \ldots\ldots F_n$ ہیں۔تب انطباق کے اصول کے مطابق ہر ایک قوت آزادانہ کام کرتی ہے تو دیگر جسم اسے متاثر نہیں کرتے۔لہٰذا حاصل قوت F_R کو ہم سمتیہ جمع طریقے کے ذریعہ معلوم کر لیتے ہیں،

$$F_R = F_1 + F_2 + ... + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

یہاں نشان Σ جمع کو ظاہر کرتا ہے۔

3۔ کیپلر کے سیاری حرکت کے قانون بتاتے ہیں کہ

(a) سبھی سیارے ناقص مداروں میں حرکت کرتے ہیں اور سورج ان مداروں کے دو میں سے کسی ایک ماسکی نقطے پر واقع ہوتا ہے۔

(b) سورج سے کسی سیارے تک کھینچا نصف قطر سمتیہ مساوی وقفہ وقت میں مساوی رقبہ طے کرتا ہے۔ یہ اس حقیقت کا نتیجہ ہے کہ کسی سیارے پر لگنے والی مادی کشش قوت مرکزی قوت ہوتی ہے۔ لہٰذا زاویائی معیار حرکت کی بقا ہوتی ہے۔

(c) کسی سیارے کے مداری دور کا مربع اس کے ناقص مدار کے نصف محور اکبر کے مکعب کا متناسب ہوتا ہے۔

سورج کے اطراف دائری مدار میں طواف کر رہے سیارے کا دور T اور اس کے نصف قطر میں درج ذیل رشتہ ہوتا ہے۔

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{G\,M_s}\right) R^3$$

یہاں M_S سورج کی کمیت ہے۔ زیادہ تر سیاروں کی راہ سورج کے اطراف تقریباً دائری مدار میں ہوتی ہے۔ اگر R کو نصف محور اکبر a سے بدلیں تو ناقص مداروں کے لیے درج بالا مساوات لاگو ہوگی،

4۔ مادی کشش کے سبب پیدا ہونے والے اسراع کی قدر

(a) زمین کی سطح سے h اونچائی پر

$$g(h) = \frac{G\,M_E}{(R_E + h)^2}$$

$$\approx \frac{G\,M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \quad (h << R_E \text{ کے لیے})$$

$$g(h) = g(0)\left(1 - \frac{2h}{R_E}\right) \text{ جہاں } g(0) = \frac{G\,M_E}{R_E^2}\text{ ،}$$

(b) زمین سے d گہرائی پر

$$g(d) = \frac{G\,M_E}{R_E^2}\left(1 - \frac{d}{R_E}\right) = g(0)\left(1 - \frac{d}{R_E}\right)$$

5۔ مادی کشش قوت ایک بقائی قوت ہوتی ہے۔ اس لیے کسی توانائی بالقوۃ تفاعل کو معرف کیا جاسکتا ہے۔ ایک دوسرے سے r دوری پر واقع

دو ذرات سے منسلک مادی کشش توانائی بالقوۃ

$$V = -\frac{G\, m_1\, m_2}{r}$$

دوری r کے لاانتہا کی طرف بڑھنے $(r \to \infty)$ پر V کی قدر صفر ہو جاتی ہے۔ ذرات کے نظام کی کل توانائی ذرات کے سبھی جوڑوں کی توانائی کی جمع کے برابر ہوتی ہے۔ جب کہ ہر ایک جوڑے کو مذکورہ بالا مساوات کی اصطلاح میں ظاہر کیا گیا ہے۔ یہ تعین انطباق کے اصول کا نتیجہ ہے۔

6۔ اگر کسی جدا نظام میں m کمیت کا کوئی ذرہ M کمیت کے کسی بھاری جسم کے قریب V چال سے متحرک ہے تو نظام کی کل توانائی درج ذیل فارمولے کے ذریعہ ظاہر کی جاتی ہے:

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2 - \frac{G\, M\, m}{r}$$

یعنی کل میکانکی توانائی حرکی اور بالقوۃ توانائیوں کی حاصل جمع ہے۔ کل توانائی حرکت کی مستقلہ ہوتی ہے۔

7۔ اگر کمیت M کے اطراف a نصف قطر کے دائری مدار میں m کمیت کا کوئی جسم طواف کر رہا ہے، اور $M >> m$ ہے تو نظام کی کل توانائی

$$E = -\frac{G\, M\, m}{2a}$$

اس میں اختیاری مستقلہ کا انتخاب درج بالا نقطہ (5) کے مطابق ہے۔ کسی مقید نظام، یعنی ایسا نظام جس میں مدار بند ہو جیسے کہ ایک ناقص مدار، کے لیے توانائی منفی ہوتی ہے۔ حرکی اور بالقوۃ توانائیاں درج ذیل ہوتی ہیں،

$$K = \frac{G\, M\, m}{2a}$$

$$V = -\frac{G\, M\, m}{a}$$

8۔ زمین کی سطح سے چالِ فرار ہے۔

$$v_e = \sqrt{\frac{2G\, M_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

اور اس کی قیمت $11.2\ \text{km s}^{-1}$ ہے۔

9۔ اگر کوئی ذرہ کسی یکساں کرّوی خول یا ٹھوس کرّے، جس کے اندر کمیت کی تقسیم میں کرّوی تشاکل ہو، کے باہر واقع ہے، تو وہ کرّہ ذرہ کو اس طرح کشش کرتا ہے جیسے کہ کرّہ کی کل کمیت اس کے مرکز پر مرتکز ہو۔

10۔ اگر کوئی ذرہ کسی یکساں کرّوی خول کے اندر ہے، تو ذرہ کے اوپر لگنے والی مادی کشش قوت صفر ہوگی۔ اگر ذرہ کسی متجانس ٹھوس کرّے کے اندر ہے تو ذرہ پر لگنے والی قوت کرّے کے مرکز کی طرف ہوتی ہے۔ ذرے کے اوپر لگنے والی قوت کرّے کے اندرونی کمیت کے سبب ہوتی ہے۔ (آپ اس کے ثبوت کے لیے ضمیمہ دیکھ سکتے ہیں۔

11۔ ایک قائم ارضی ذیلی سیّارہ (ارضی ہم وقت ترسیل) زمین کے مرکز سے تقریباً 4.22×10^4 کی دوری پر خطِ استوائی سطح پر دائری مدار میں گردش کرتا ہے۔

طبیعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	تبصرہ
مادی کشش مستقلہ	G	$[M^{-1} L^3 T^{-2}]$	$N\ m^{-2} kg^{-2}$	$[6.67 \times 10^{-11}]$
مادی کشش توانائی بالقوۃ	$V(r)$	$[ML^2 T^{-2}]$	J	$-\frac{GMm}{r}$
ثقلی مضمر	$U(r)$	$[L^2 T^{-2}]$	$J kg^{-1}$	$-\frac{GM}{r}$ (عددیہ)
مادی کشش شدت	$\mathbf{g}$ یا $\mathbf{E}$	$[LT^{-2}]$	$m s^{-2}$	$\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ (سمتیہ)

قابل غور نکات

1۔ کسی دیگر جسم کی مادی کشش کے اثر کے تحت کسی جسم کی حرکت کے بارے میں غور کریں تو درج ذیل مقداریں بقائی رہتی ہیں:

(a) زاویائی معیار حرکت

(b) کل میکانکی توانائی

خطی معیار حرکت بقائی نہیں رہتا

2۔ زاویائی معیار حرکت کی بقا سے کیپلر کا دوسرا قانون حاصل ہوتا ہے۔ لیکن یہ صرف مادی کشش کے مقلوب مربع قانون کے لیے مخصوص نہیں بلکہ یہ کسی بھی مرکزی قوت کے لیے لاگو ہوتا ہے۔

3۔ کیپلر کے تیسرے قانون [مساوات (8.1) دیکھیں] میں $T^2 = K_S R^3$ مستقلہ K_S۔ دائری مداروں والے سبھی سیاروں کے لیے یکساں ہوتا ہے۔ اس کی قدر سیاروں کے مطابق نہیں بدلتی۔ زمین کا طواف کرنے والے ذیلی سیاروں پر بھی یہی بات لاگو ہوتی ہے [مساوات (8.38)]۔

4۔ خلائی ذیلی سیاروں کے اندر کوئی خلا باز بے وزنی کا تجربہ کرتا ہے۔ ایسا اس وجہ سے نہیں ہوتا ہے کہ خلا میں اس مقام پر مادی کشش قوت کم ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ خلا باز اور ذیلی سیارہ دونوں ہی زمین کی طرف آزادانہ گر رہے ہیں۔

5۔ ایک دوسرے سے r دوری پر واقع دو ذرات سے متعلق مادی کشش توانائی بالقوۃ کو دکھایا جا سکتا ہے:

$$V = -\frac{Gm_1 m_2}{r} + \text{مستقلہ}$$

یہاں مستقلہ کی قدر کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ اسے صفر ماننا سب سے آسان انتخاب ہے۔ اس انتخاب سے

$$V = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$$

اس انتخاب میں یہ پنہاں ہے کہ جب $r \to \infty$ تو $V \to 0$ ہوتا ہے۔ مادی کشش توانائی کی صفر کے وقوع کا انتخاب توانائی بالقوۃ میں اختیاری مستقلہ کے انتخاب کی طرح ہے۔ غور کیجیے کہ مادی کشش قوت اس مستقلہ کے انتخاب سے تبدیل نہیں ہوتی۔

6۔ کسی شے کی کل توانائی اس کی حرکی توانائی (جو ہمیشہ مثبت ہوتی ہے) اور اس کی توانائی بالقوۃ کا حاصلِ جمع ہے۔ لاانتہا کی مناسبت سے (یعنی اگر ہم فرض کر لیں کہ لاانتہا پر شے کی توانائی بالقوۃ صفر ہے) تو کسی شے کی مادی کشش توانائی بالقوۃ منفی ہوتی ہے۔ ایک سیارچہ کی کل توانائی منفی ہوتی ہے۔

7۔ اکثر توانائی بالقوۃ کی جس عبارت mgh سے ہمارا سامنا ہوتا ہے وہ درحقیقت درج بالا نقاطہ (6) میں بیان کیے گئے مادی کشش توانائی بالقوۃ کے فرق کے تقریبی ہے۔

8۔ اگرچہ دو ذرات کے درمیانی مادی کشش قوت مرکزی قوت ہے لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ کن ہی دو متنہی استوار اجسام کے درمیان لگنے والی قوت ان کمیتوں کے مراکز کو ملانے والے خط کے موافق ہو۔ تاہم کسی کرّوی متشاکل جسم کے لیے اس جسم سے باہر واقع کسی ذرے پر لگی قوت ایسی ہوتی ہے جیسے کہ جسم کی کمیت اس کے مرکز پر مرتکز ہو اور یہ قوت اسی لیے مرکزی قوت ہوتی ہے۔

9۔ کسی کرّوی خول کے اندر کسی ذرے پر ثقلی قوت صفر ہوتی ہے تاہم (کسی دھاتی خول کے برعکس جو برقی قوتوں کے لیے ڈھال کا کام کرتا ہے) وہ خول اپنے سے باہر واقع دوسرے اجسام سے اپنے اندر کے کسی ذرے پر لگنے والی ثقلی قوت سے ڈھال نہیں مہیا کرتے نہیں ہوتا۔ ثقلی ڈھال (Shield) ممکن نہیں ہے۔

مشق

8.1۔ درج ذیل کا جواب دیجیے:

(a) آپ کسی چارج کو کسی کھوکھلے موصل (Conductor) کے اندر رکھ کر برقی قوتوں سے اس کو ڈھال مہیا کر سکتے ہیں۔ کیا آپ کسی شے کو کسی کھوکھلے کرہ کے اندر رکھ کر یا کسی دیگر طریقہ سے کسی قریبی شے کی مادی کشش قوت کے اثر سے بچنے کے لیے ڈھال مہیا کر سکتے ہیں؟

(b) زمین کے اطراف طواف کر رہے کسی چھوٹے اسپیس شپ میں خلاباز مادی کشش کا تجربہ نہیں کر سکتا۔ اگر زمین کے اطراف طواف کر رہے اسپیس اسٹیشن کا سائز بڑا ہو تو کیا اس بات کی توقع کی جا سکتی ہے کہ اسے مادی کشش کا احساس ہو جائے گا؟

(c) اگر آپ زمین پر سورج کے سبب مادی کششقوت کا مقابلہ چاند کے سبب مادی کشش قوت کے ساتھ کریں تو آپ پائیں گے کہ سورج کی کشش چاند کی کشش سے زیادہ ہے۔ اگلی مشق میں دیے گئے اعداد و شمار سے آپ خود اس کی توثیق کر سکتے ہیں۔ تاہم چاند کی کشش کا مدوجزری اثر سورج کے مدوجزری اثر سے زیادہ ہے۔ کیوں؟

8.2 صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے:

(a) مادی کشش کے سبب پیدا ہونے والا اسراع اونچائی بڑھنے کے ساتھ بڑھتا/گھٹتا ہے۔

(b) مادی کشش کے سبب پیدا ہونے والا اسراع/گہرائی بڑھنے کے ساتھ بڑھتا/گھٹتا ہے۔ (زمین کو یکساں کثافت کا کرّہ مانیے)

(c) مادی کشش کے سبب پیدا ہونے والا اسراع زمین کی کمیت/جسم کی کمیت پر منحصر نہیں ہوتا۔

(d) زمین کے مرکز سے r_2 اور r_1 کی دوری پر دو نقاط کی توانائی بالقوۃ کے فرق کے لیے فارمولا $mg\ (r_2 - r_1)$ کے بمقابلہ $-\mathrm{GMm}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r1}\right)$ سے زیادہ/کم درست ہے۔

8.3 مان لیجیے سورج کے گرد کوئی سیارہ زمین کے مقابلے دوگنی تیز حرکت کر رہا ہے تو زمین کے بالمقابل اس کا مداری سائز کیا ہوگا؟

8.4 زحل کے ایک ذیلی سیارہ کا مداری دور 1.769 دن ہے اور مدار کا نصف قطر 4.22×10^2 میٹر ہے۔ دکھائیں کہ زحل کی کمیت سورج کے بالمقابل تقریباً ایک ہزارویں حصہ کے برابر ہے۔

8.5 فرض کیجیے ہماری گیلکسی 2.4×10^{11} ستاروں سے ملکر بنی ہے۔ ایک ستارہ جو گیلکٹیک مرکز سے 50,000 نوری سال کی دوری پر ہے ایک پورے چکر میں کتنا وقت لگائے گا؟ ملکی وے کا قطر 10^5 نوری سال ہے۔

8.6 صحیح متبادل کا انتخاب کیجیے:

(a) اگر توانائی بالقوۃ کا صفر لا انتہا پر ہو تو طواف کر رہے کسی ذیلی سیارے کی کل توانائی اس کی حرکی/توانائی بالقوۃ کی منفی ہے۔

(b) مدار میں طواف کرتے ہوئے کسی ذیلی سیارے کو زمین کے مادی کشش اثر سے باہر دھکیلنے کے لیے جتنی توانائی درکار ہوتی ہے وہ کسی ساکن شے کو زمین کے کششی دائرہ اثر کے باہر اسی اونچائی (ذیلی سیارے کی اونچائی) تک اچھالنے کے لیے درکار توانائی سے زیادہ / کم ہوتی ہے۔

8.7 کیا زمین سے کسی جسم کی چال فرار درج ذیل پر منحصر ہوتی ہے:

(a) جسم کی کمیت پر (b) اس مقام پر جہاں سے اسے پھینکا جاتا ہے،

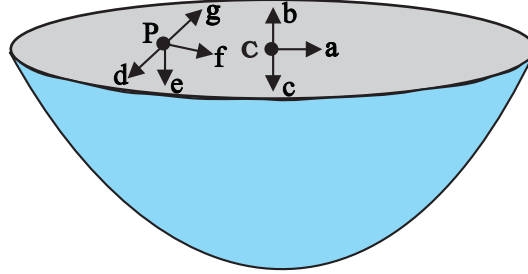
(c) پھینکنے کی سمت پر (d) اس جگہ کی اونچائی پر جہاں سے اسے پھینکا گیا ہے؟ اپنے جواب کی تشریح کیجیے۔

8.8 کوئی دمدار ستارہ سورج کے اطراف نہایت ناقص مدار میں طواف کر رہا ہے۔ کیا پورے مدار میں دمدار ستارے کی (a) خطی چال (b) زاویائی چال (c) زوایائی معیار حرکت (d) حرکی توانائی (e) کل توانائی مستقل ہوتی ہے؟ سورج کے نہایت قریب آنے پر دمدار ستارے کی کمیت میں ہوئے کسی بھی نقصان کو نظر انداز کیجیے۔

8.9 ان میں کون سی علامتیں خلاء میں خلا بازوں کو تکلیف دیتی ہیں

(a) پیروں کا سوجنا (b) چہرے کا سوجنا (c) سردرد (d) رخ متعین کرنے والی ساکھ

مندرجہ ذیل مشق 8.10 اور مشق 8.11 میں، دیے ہوئے جوابات میں سے درست جواب منتخب کیجیے۔

8.10 ڈھول کی سطح (نصف کروی خول کا حصہ) کے مرکز پر مادی کشش شدت کی سمت کس تیر کے ذریعہ معین ہوگی۔ (شکل 8.12 دیکھیے) (a) (i)، (b) ii، (c) (iii)، (iv) صفر۔

شکل 8.12

8.11۔ درج بالا سوال میں کسی اختیاری نقطے P پر مادی کشش شدت کی سمت کس تیر کے ذریعہ ظاہر ہوگی (i) d، (ii) (e)، (iii) (f)، (iv) g

8.12۔ زمین سے کوئی راکٹ سورج کی طرف داغا گیا ہے۔ زمین کے مرکز سے کتنی دوری پر راکٹ پر لگنے والی مادی کشش قوت صفر ہوگی؟ سورج کی کمیت = 2×10^{30} kg، زمین کی کمیت = 6×10^{24} kg۔ دیگر سیاروں وغیرہ کے اثر کو نظر انداز کیجیے۔ (مداری نصف قطر 1.5×10^{11}m)۔

8.13۔ آپ سورج کو کس طرح تولیں گے، یعنی اس کی کمیت کا اندازہ کیسے لگائیں گے؟ سورج کے اطراف زمین کا اوسط مداری نصف قطر 1.5×10^{8}km ہے۔ سورج کی کمیت کا تخمینہ لگائیے۔

8.14۔ زحل کا سال، زمین کے سال کا 29.5 گنا ہے۔ اگر سورج سے زمین کی دوری $1.5\ 0 \times 10^{8}$km ہے، تو سورج سے زحل کتنی دور ہے؟

8.15۔ زمین کے سطح پر کسی جسم کا وزن 63 N ہے۔ اگر یہی جسم زمین کی سطح سے اس کی نصف قطر کی آدھی اونچائی پر واقع ہے تو اس پر زمین کے سبب لگنے والی مادی کشش قوت کتنی ہوگی؟

8.16۔ زمین کو یکساں کمیتی کثافت کا کرّہ مانتے ہوئے، اگر کوئی شے جس کا وزن زمین کی سطح پر 250 N ہے تو زمین کے مرکز کی طرف آدھے راستے پر اس کا وزن کیا ہوگا؟

8.17۔ زمین کی سطح سے کوئی راکٹ $5\ kms^{-1}$ کی چال سے عمودی طور پر داغا جاتا ہے۔ زمین پر واپس ہونے سے پہلے راکٹ زمین سے کتنی دور جاتا ہے؟ زمین کی کمیت 6.0×10^{24}kg، زمین کا اوسط نصف قطر 6.4×10^{6}m اور kg^{-2}

$G = 6.67 \times 10^{11}$ N m^2 ہے۔

8.18۔ زمین کی سطح پر کسی پروجکٹائل کی چالِ فرار 11.2 km s^{1} ہے۔ کسی جسم کو اس سے تین گنی چال سے پھینکا جاتا ہے۔ زمین سے کافی دوری پر اس کی چال کتنی ہوگی؟ سورج اور دیگر سیاروں کی موجودگی کو نظر انداز کیجیے۔

8.19۔ کوئی ذیلی سیارہ زمین کے اطراف میں اس کی سطح سے 400 km کی اونچائی پر طواف کر رہا ہے۔ زمین کے مادی کشش کے اثر سے ذیلی سیارے کو باہر نکالنے کے لیے کتنی توانائی صرف کی جانی چاہیے؟ ذیلی سیارے کی کمیت = 200 kg، زمین کی کمیت = 6.0×10^{24} kg، زمین کا نصف قطر = 6.4×10^{-6} m; اور $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}

8.20۔ شمسی کمیت ($= 2 \times 10^{30}$ kg) کے دو تارے ایک دوسرے کی طرف براہ راست تصادم کے لیے آرہے ہیں۔ جب وہ 10^9 km کی دوری پر ہیں تو ان کی چالیں نظر انداز کیے جانے کے قابل ہیں۔ وہ کس چال سے ٹکراتے ہیں؟ ہر ایک تارے کا نصف قطر 10^4 km ہے۔ مانئے کہ جب تک تارے ٹکراتے نہیں تب تک ان میں کوئی تخریب نہیں ہوتی (G کی معلوم قدر کا استعمال کیجیے)۔

8.21۔ کسی افقی میز پر دو بھاری کرّے، ہر ایک کی کمیت 100 kg اور نصف قطر 0.10 m ہے، ایک دوسرے سے 1.0 m کی دوری پر رکھے گئے ہیں۔ کرّوں کے مراکز کو ملانے والے خط کے وسطی نقطہ پر مادی کشش میدان اور قوۃ کیا ہے؟ اس نقطے پر رکھی گئی کوئی شے کیا توازن میں ہے؟ اگر ہاں تو کیا توازن مستحکم ہے یا غیر مستحکم؟

اضافی مشقیں

8.22۔ جیسا کہ آپ نے اس باب میں پڑھا ہے، کوئی قائم ارضی ذیلی سیارہ زمین کی سطح سے تقریباً 36,000 km اونچائی پر زمین کے اطراف طواف کرتا ہے۔ ذیلی سیارے کے مقام پر زمین کے مادی کشش کے سبب قوۃ کیا ہے؟ (لا انتہا پر توانائی بالقوۃ کو صفر مانیے)۔ زمین کی کمیت = 6.0×10^{24} kg، نصف قطر = 6400 km

8.23۔ سورج کی کمیت سے 2.5 گنا کا تارہ جو گھٹ کر 12 km کے سائز کا ہو گیا ہے، 1.2 rev فی سیکنڈ کی چال سے گردش کر رہا ہے۔ (اس طرح کے نہایت گھٹے ہوئے تاروں کو نیوٹران تارے کہتے ہیں۔ ایسا مانا جاتا ہے پلسار کہے جانے والے اور مشاہدہ کیے جانے والے اور نجمی اجسام اسی زمرے کے ہیں)۔ اس کے خط استوا پر رکھا کوئی جسم مادی کشش کے سبب کیا اس کے ساتھ چپکا رہے گا؟ (سورج کی کمیت = 2×10^{30} kg)۔

8.24۔ کوئی اسپیس شپ مریخ پر ٹھہرا ہوا ہے۔ اسپیس شپ پر کتنی توانائی صرف کی جانی چاہیے کہ یہ نظامِ شمسی سے باہر نکل جائے؟ اسپیس شپ کی کمیت = 1000 kg، سورج کی کمیت = 2×10^{30} kg، مریخ کی کمیت = 6.4×10^{23} kg، مریخ کا نصف قطر = 3395 km، مریخ کے مدار کا نصف قطر 2.28×10^{8} km اور $G = 6.67\times10^{11}$ N m^2 kg^{-2}

8.25۔ مریخ کی سطح سے کسی راکٹ کو $2\ kms^{-1}$ کی چال سے عمودی طور پر داغا گیا ہے۔ اگر اس کی تقریباً 20% ابتدائی توانائی مریخ کی فضائی مزاحمت کی وجہ سے ضائع ہو جاتی ہے، تو مریخ پر واپس آنے سے پہلے راکٹ، مریخ کی سطح سے کتنی دور جائے گا۔
مریخ کی کمیت $6.4 \times 10^{23}\ kg$ ،$G = 6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$ ۔